ЭФФЕКТИВНАЯ ПОДГОТОВКА К ОГЭ

ОГЭ

МАТЕМАТИКА

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПРАВОЧНИК

- Подробный теоретический материал
- Тренировочные задания

ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ОГЭ! * ГАРАНТИЯ КАЧЕСТВА * ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ОГЭ!

ЭФФЕКТИВНАЯ ПОДГОТОВКА К ОГЭ

ОГЭ

И.В. Третьяк

МАТЕМАТИКА

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПРАВОЧНИК

МОСКВА
2016

УДК 373:51
ББК 22.1я721
Т66

Третьяк, Ирина Владимировна.

Т66 ОГЭ. Математика : универсальный справочник / И.В. Третьяк. — Москва : Эксмо, 2016. — 352 с. — (ОГЭ. Универсальный справочник).

Справочник адресован учащимся 9-х классов для подготовки к ОГЭ по математике.

Пособие содержит подробный теоретический материал по всем темам, проверяемым экзаменом, а также тренировочные задания в форме ОГЭ. В конце справочника приводятся ответы.

Издание будет полезно учителям математики, родителям для эффективной подготовки учащихся к ОГЭ.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для среднего школьного возраста
орта мектеп жасындағы балаларға арналған

ОГЭ. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПРАВОЧНИК

Третьяк Ирина Владимировна

ОГЭ

Математика

Универсальный справочник
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Е. Задвинская*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86, 8 (495) 956-39-21.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86, 8 (495) 956-39-21
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша
арыз-талаптарды қабылдаушының
өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8 (727) 2 51 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ о техническом регулировании можно получить по адресу: http://eksmo.ru/certification/

Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Подписано в печать 18.09.2015.
Формат 84x108 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 36,96.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-699-82584-4

ISBN 978-5-699-82584-4

СОДЕРЖАНИЕ

1. Числа и вычисления

Знать:
- определение натуральных, целых, рациональных, действительных чисел;
- признаки делимости на 2, 3, 5, 9 и 10;
- единицы измерения различных величин;
- зависимости между величинами в виде формул;
- отношения, пропорции, проценты;
- определения квадратного и кубического корня из числа.

Уметь:
- выполнять арифметические действия над рациональными числами;
- переходить от одной формы записи чисел к другой;
- округлять целые числа и десятичные дроби, находить приближения чисел, выполнять оценку результата;
- решать текстовые задачи, связанные с отношением, пропорциональностью величин, дробями, процентами;
- выполнять преобразование выражений, содержащих квадратный и кубический корень из чисел.

1.1. Натуральные числа

1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация

Натуральными называют числа, которые используются для счета предметов — 1, 2, 3, 4, ... (число 0 не является натуральным).

Множество натуральных чисел обозначают N.

Запись «$3 \in N$» означает, что число три принадлежит множеству натуральных чисел, а запись «$0 \notin N$» означает, что число нуль не принадлежит этому множеству.

Десятичная система счисления — позиционная система счисления по основанию 10.

Целое число A в десятичной системе счисления записывается в виде конечной линейной комбинации степеней числа 10.

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0} = a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10^1 + a_0,$$

где $a_{n-1}\ldots a_0$ — цифры числа, причем $a_{n-1} \neq 0$, $n \in N$.

Пример 1. $5\,783 = 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0$.

В **римской нумерации** цифры записывают с помощью букв латинского алфавита:

1 — I	8 — VIII
2 — II	9 — IX
3 — III	10 — X
4 — IV	50 — L
5 — V	100 — C
6 — VI	500 — D
7 — VII	1000 — M

Пример 2. Записать числа, используя римскую нумерацию.

222 — CCXXII;
444 — CDXLIV;
555 — DLV;
545 — DXLV;
689 — DCLXXXIX;
1145 — MCXLV.

1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами

Для натуральных чисел определены следующие действия: *сложение*, *вычитание*, *умножение*, *деление*, *возведение в степень*, *извлечение корня*.

Первые четыре действия являются арифметическими.

Пусть a, b и c — натуральные числа.

Законы сложения	Равенство
Переместительный	$a + b = b + a$
Сочетательный	$(a + b) + c = a + (b + c)$

Законы умножения	Равенство
Переместительный	$ab = ba$
Сочетательный	$(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$

Распределительный закон: $a(b + c) = ab + ac$.

Действия с нулем и единицей

$\boxed{a + 0 = a}$ $\boxed{a : 1 = a}$ $\boxed{0 : a = 0}$

$\boxed{a \cdot 0 = 0}$ $\boxed{a : a = 1}$ $\boxed{\cancel{a : 0}}$ — на 0 делить нельзя

Пример 1. Используя законы сложения и умножения, вычислить устно значения выражений:

а) $2 \cdot 137 \cdot 5$;
б) $125 \cdot 77 \cdot 8$;
в) $25 \cdot 2 \cdot 136 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4$;
г) $73 \cdot 17 + 27 \cdot 17$;
д) $4 \cdot 63 + 4 \cdot 79 + 142 \cdot 6$.

Решение:

а) $2 \cdot 137 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot 137 = 10 \cdot 137 = 1370$;
б) $125 \cdot 77 \cdot 8 = 77 \cdot (125 \cdot 8) = 77 \cdot 1000 = 77\,000$;
в) $25 \cdot 2 \cdot 136 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (136 \cdot 10) = 100 \cdot 10 \cdot 1360 = 1\,360\,000$;
г) $73 \cdot 17 + 27 \cdot 17 = 17 \cdot (73 + 27) = 17 \cdot 100 = 1700$;
д) $4 \cdot 63 + 4 \cdot 79 + 142 \cdot 6 = 4 \cdot (63 + 79) + 142 \cdot 6 = 4 \cdot 142 + 142 \cdot 6 = 142 \times (4 + 6) = 142 \cdot 10 = 1420$.

1.1.3. Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из который равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}},$$

где a — основание степени, n — показатель степени.

Степенью числа a с показателем 1 является само число a.

Вычисление значения степени называют действием **возведение в степень.**

Свойства степени с натуральным показателем ($m \in$ N; $n \in$ N)

Свойства	Примеры
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$
$a^m : a^n = a^{m-n}$; $m > n$, $a \neq 0$	$7^4 : 7^3 = 7^1 = 7$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	а) $(2a)^7 = 2^7 \cdot a^7 = 128a^7$; б) $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$	а) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$; б) $\frac{125^3}{25^3} = \left(\frac{125}{25}\right)^3 = 5^3 = 125$

Пример 1. Вычислить: $\dfrac{17^9 \cdot 2^{12} \cdot 5^6}{17^8 \cdot 5^4 \cdot 2^{10}}$.

Решение:

$$\frac{17^9}{17^8} \cdot \frac{2^{12}}{2^{10}} \cdot \frac{5^6}{5^4} = 17^{9-8} \cdot 2^{12-10} \cdot 5^{6-4} = 17 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 17 \cdot (2 \cdot 5)^2 =$$

$$= 17 \cdot 10^2 = 17 \cdot 100 = 1700.$$

Пример 2. Найти значение выражения: $\dfrac{6^{2n} \cdot 4^2}{9^n \cdot 2^{2(n+2)}}$.

Решение:

$$\frac{6^{2n} \cdot 4^2}{9^n \cdot 2^{2(n+2)}} = \frac{(3 \cdot 2)^{2n} \cdot 16}{(3^2)^n \cdot 2^{2n+4}} = \frac{3^{2n} \cdot 2^{2n} \cdot 16}{3^{2n} \cdot 2^{2n} \cdot 2^4} = \frac{16}{16} = 1.$$

1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа. Разложение натурального числа на простые множители

Делителем натурального числа a называется натуральное число, на которое a делится без остатка.

Пример 1. Число 12 имеет делители: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Число 1 является делителем любого натурального числа.

Натуральное число называется **простым**, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число.

Число, имеющее более двух делителей, называется **составным.**

Пример 2. Числа 2, 3, 11, 23 — простые числа; числа 4, 8, 15, 27 — составные.

Признак делимости произведения нескольких чисел: если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

Пример 3. Произведение $24 \cdot 15 \cdot 77$ делится на 12, поскольку множитель этого числа 24 делится на 12.

Признак делимости суммы (разности) чисел: если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и вся сумма делится на это число.

Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a+c) \vdots b$.

Здесь a, b и c — натуральные числа, знак «$\vdots$» — делится.

Пример 4. Число $(77+99) \vdots 11$, поскольку $77 \vdots 11$ и $99 \vdots 11$.

Если $a \vdots b$, а c не делится на b, то $a + c$ не делится на число b.

Пример 5. $21 \vdots 3$, а 22 не делится на 3. Это значит, что (21 + 22) не делится на 3.

Пример 6. Исходя из того, что $25 \vdots 5$ и $(25+15) \vdots 5$, делаем вывод, что $15 \vdots 5$.

Если $a \vdots c$ и $c \vdots b$, то $a \vdots b$.

Пример 7. Исходя из того, что $72 \vdots 24$ и $24 \vdots 12$, делаем вывод, что $72 \vdots 12$.

Представление числа в виде произведения степеней простых чисел называют **разложением числа на простые множители.**

Основная теорема арифметики: любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители только одним способом.

При разложении числа на простые множители используют *признаки делимости* и применяют запись «столбиком», при которой делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывают под делимым.

Пример 8. Разложить на простые множители числа: а) 339; б) 1197.

Решение:

а)
$$\begin{array}{r|l} 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$
$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11;$

б)
$$\begin{array}{r|l} 1197 & 3 \\ 399 & 3 \\ 133 & 7 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$
$1197 = 3^2 \cdot 7 \cdot 19.$

1.1.5. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Делится на	Признак делимости	Примеры
2	Число делится на 2, если его **последняя цифра** делится на 2	$27\,374 \vdots 2$ 27 371 не делится на 2
3	Число делится на 3, если **сумма его цифр** делится на 3	$27\,375 \vdots 3$, поскольку $2 + 7 + 3 + 7 + 5 = 24$. $24 \vdots 3$
5	Число делится на 5, если его **последняя цифра** 0 или 5	$23\,330 \vdots 5$ $10\,745 \vdots 5$ 48 377 не делится на 5
9	Число делится на 9, если **сумма его цифр** делится на 9	$488\,718 \vdots 9$, поскольку $4 + 8 + 8 + 7 + 1 + 8 = 36$. $36 \vdots 9$
10	Число делится на 10, если его **последняя цифра** 0	$270 \vdots 10$ 272 не делится на 10

Признаки делимости на 4, 25 и 11

Делится на	Признак делимости	Примеры
4	Число делится на 4, если число, составленное из **двух его последних цифр**, делится на 4	27 032⋮4, поскольку 32⋮4
25	Число делится на 25, если число, составленное из **двух его последних цифр**, делится на 25	3 300, 3 725, 48 375, 3 150 делятся на 25
11	Число делится на 11, если **алгебраическая сумма его цифр** $a_0 - a_1 + a_2 - - a_3 + ... + (-1)^n a_{n-1}$ делится на 11	38 137⋮11, поскольку $3 - 8 + 1 - 3 + 7 = 0$. 0⋮11

Существуют признаки делимости на 6, 15, 45 и т. д., т. е. на числа, произведение которых можно разложить на множители 2, 3, 5, 9 и 10.

Пример 1. Признак делимости на 6 может выглядеть так: на 6 делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 и их последняя цифра делится на 2.

Пример 2. Указать наибольшее натуральное число, делящееся на 5 и удовлетворяющее неравенству:
а) $128 < x < 145$; б) $1157 < x \leq 1160$.
Ответ: а) 140; б) 1160.

Пример 3. На одной стоянке 26 автомобилей, на другой — на 1 больше, а на третьей — в 2 раза больше, чем на первой. Можно ли все автомобили разместить поровну на трех стоянках?
Ответ: можно, поскольку общее число автомобилей: $26 + (26 + 7) + 26 \cdot 2 = 111$. 111⋮3, т. к. $1 + 1 + 1 = 3$⋮3.

1.1.6. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называется **наибольшим общим делителем этих чисел (НОД)**.

Пример 1. НОД (10; 25) = 5; НОД (18; 24) = 6; НОД (7; 21) = 1.

Если наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1, то эти числа называются **взаимно простыми.**

Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (НОД)

Действие	**Пример.** Найти НОД (180; 840)
1. Разложить данные числа на простые множители	$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
2. Выписать все простые числа, которые входят **в каждое** из полученных разложений	НОД (180; 840) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Окончание таблицы

Действие	**Пример.** Найти НОД (180; 840)
Каждое из выписанных простых чисел взять с **наименьшим** из показателей степени, с которыми оно входит в разложение данных чисел	
3. Записать произведение полученных степеней	НОД (180;840) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Пример 2. Найти НОД (132; 180; 144).

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$; $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $144 = 2^4 \cdot 3^2$

НОД (132; 180; 144) = $2^2 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

Пример 3. Между учениками одного класса поделили поровну 155 тетрадей и 62 ручки. Сколько учеников в этом классе?

Решение:

Нахождение количества учащихся этого класса сводится к нахождению наибольшего общего делителя чисел 155 и 62, поскольку тетради и ручки поделили поровну.

$155 = 5 \cdot 31$; $62 = 2 \cdot 31$. НОД (155; 62) = 31.

Ответ: 31 ученик.

Кратным натурального числа a называется натуральное число, которое делится на a без остатка.

Пример 4. Число 8 имеет кратные: 8, 16, 24, 32, ... Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных.

Наименьшим общим кратным (НОК) чисел называется наименьшее натуральное число, которое кратно этим числам.

Алгоритм нахождения наименьшего общего кратного (НОК)

Действие	**Пример.** Найти НОК (84; 90)
1. Разложить числа на простые множители	$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
2. Вычислить **все** простые числа, которые входят хотя бы в одно из разложений. Каждое из выписанных простых чисел взять с **наибольшим** показателем степени, с которым оно входит в разложения данных чисел	НОК (84; 90) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Окончание таблицы

Действие	**Пример.** Найти НОК (84; 90)
3. Записать произведение полученных степеней	НОК (84; 90) = 1260

Пример 5. Найти НОК (18; 24; 30).

Решение:

$$18 = 2 \cdot 3^2;\ 24 = 2^3 \cdot 3;\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

$$\text{НОК}\ (18;\ 24;\ 30) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360.$$

Пример 6. Два велосипедиста одновременно стартовали по велотреку в одном направлении. Один делает круг за 1 мин, а другой — за 45 с. Через какое наименьшее количество минут после начала движения они встретятся на старте? Сколько кругов по велотреку сделает каждый из них?

Решение:

Количество минут, через которое они снова встретятся на старте, должно делиться и на 1 мин, и на 45 с. 1 мин = 60 с. Таким образом, необходимо найти НОК (45; 60). $45 = 3^2 \cdot 5$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. НОК $(45; 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$. Значит, велосипедисты встретятся на старте через 180 с = 3 мин, при этом первый сделает 180 : 60 = 3 круга, а второй — 180 : 45 = 4 круга.

Ответ: 3 мин; 3 круга, 4 круга.

1.1.7. Деление с остатком

Если натуральное число a не делится нацело на натуральное число b, можно выполнить **деление с остатком.** При этом полученное частное называется **неполным.** Справедливо равенство:

$$a = b \cdot n + r,$$

где a — делимое, b — делитель, n — неполное частное, r — остаток.

Пример 1. Пусть делимое равно 243, делитель — 4, тогда 243 : 4 = 60 (остаток 3). То есть $a = 243$, $b = 4$, $n = 60$, $r = 3$, тогда $243 = 60 \cdot 4 + 3$.

Числа, которые делятся на 2 без остатка, называются **четными:**

$$a = 2n,\ n \in \mathrm{N}.$$

Остальные числа называются **нечетными:**

$$b = 2n + 1,\ n \in \mathrm{N}.$$

1.2. Дроби

1.2.1. Обыкновенная дробь, основное свойство дроби. Сравнение дробей

Одна или несколько равных частей единицы называются **обыкновенной дробью.**

Пример 1. Дробь $\frac{3}{7}$ означает, что единицу разделили на 7 частей и взяли 3 таких части.

Дробь можно рассматривать и как результат деления натуральных чисел. Частное от деления натуральных чисел a и b можно записать в виде дроби $\frac{a}{b}$, где делимое a — **числитель**, а делитель b — **знаменатель**.

Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называется **правильной**, а дробь, где числитель больше или равен знаменателю, — **неправильной**.

Пример 2. Дроби $\frac{3}{7}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{123}{124}$ — правильные, дроби $\frac{7}{7}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{16}{1}$ — неправильные.

Число, состоящее из целой и дробной частей, можно **обратить в неправильную дробь.** Для этого нужно умножить целую часть на знаменатель и к произведению прибавить числитель данной дроби. Полученная сумма будет числителем дроби, а знаменателем остается знаменатель дробной части.

Пример 3. $5\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{16}{3}$; $8\frac{9}{10} = \frac{8 \cdot 10 + 9}{10} = \frac{89}{10}$.

Из любой **неправильной дроби можно выделить целую часть.** Для этого нужно разделить с остатком числитель на знаменатель. Частное от деления — это *целая часть*, остаток — это *числитель*, делитель — это *знаменатель*.

Пример 4. $\frac{23}{4} = [23 : 4 = 5 \text{ (ост. 3)}] = 5\frac{3}{4}$; $\frac{7}{3} = [7 : 3 = 2 \text{ (ост. 1)}] = 2\frac{1}{3}$.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится дробь, равная данной.

Основное свойство дроби используют при сокращении дробей.

Деление числителя и знаменателя на их общий делитель, отличный от единицы, называют **сокращением дробей.**

Пример 5. Наибольшим общим делителем дроби $\frac{225}{275}$ является число 25, поэтому дробь можно сократить на это число: $\frac{225}{275} = \frac{225 : 25}{275 : 25} = \frac{9}{11}$.

Сокращение дробей можно проводить поэтапно с помощью признаков делимости.

Пример 6. $\frac{48}{60} = \frac{48 : 2}{60 : 2} = \frac{24}{30} = \frac{24 : 2}{30 : 2} = \frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}$.

Сравнение дробей

1. Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше.

Пример 7. $\frac{3}{11} < \frac{5}{11}$; $\frac{2}{37} > \frac{1}{37}$; $\frac{11}{101} < \frac{9}{101}$.

2. Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше.

Пример 8. $\frac{5}{7} < \frac{5}{6}$; $\frac{11}{35} < \frac{11}{20}$; $\frac{31}{45} > \frac{31}{46}$.

Чтобы **сравнить дроби с разными числителями и знаменателями**, нужно:
1) привести дроби к наименьшему общему знаменателю;
2) сравнить полученные дроби.

Чтобы **привести дроби к наименьшему общему знаменателю**, нужно:
1) найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей (оно и будет их общим знаменателем);
2) разделить общий знаменатель на знаменатель данных дробей, т. е. найти для каждой дроби дополнительный множитель;
3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель.

Пример 9. Сравнить дроби: а) $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{5}$; б) $\frac{7}{18}$ и $\frac{11}{27}$.

Решение:

а) НОК (7; 5) = 35. $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{10}{35}$; $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{21}{35}$; так как $\frac{10}{35}<\frac{21}{35}$, то $\frac{2}{7}<\frac{3}{5}$;

б) НОК (18; 27) = 54; $\frac{7}{18}=\frac{7\cdot 3}{18\cdot 3}=\frac{21}{54}$; $\frac{11}{27}=\frac{11\cdot 2}{27\cdot 2}=\frac{22}{54}$; так как $\frac{21}{54}<\frac{22}{54}$, то $\frac{7}{18}<\frac{11}{27}$.

1.2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями

Сложение и вычитание дробей

1. При **сложении (вычитании) дробей с одинаковыми знаменателями** к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби (из числителя первой вычитают числитель второй) и оставляют тот же знаменатель. Полученную дробь, если возможно, сокращают и выделяют целую часть.

Пример 1.

а) $\frac{7}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$;

б) $\frac{9}{11}+\frac{2}{11}=\frac{11}{11}=1$;

в) $2\frac{3}{17}+5\frac{4}{17}=(2+5)+\frac{3+4}{17}=7\frac{7}{17}$;

г) $4\frac{10}{13}+2\frac{5}{13}=6\frac{15}{13}=6+\frac{13}{13}+\frac{2}{13}=7\frac{2}{13}$;

д) $7\frac{11}{15}-2\frac{4}{15}=(7-2)+\frac{11-4}{15}=5\frac{7}{15}$;

е) $8\frac{3}{22}-5\frac{7}{22}=(8-5)+\frac{3-7}{22}=3+\frac{3-7}{22}=2+\frac{22}{22}+\frac{3-7}{22}=$
$=2\frac{22+3-7}{22}=2\frac{18}{22}=2\frac{9}{11}$.

2. При **сложении (вычитании) дробей с разными знаменателями** нужно предварительно привести эти дроби к наименьшему общему знаменателю, затем

сложить (вычесть) полученные дроби, используя правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример 2.

а) $5\frac{7}{8}+6\frac{3}{10}=5+6+\frac{^{5/}7}{8}+\frac{^{4/}3}{10}=11+\frac{35+12}{40}=11+\frac{47}{40}=11+\frac{40}{40}+\frac{7}{40}=$

$=12+\frac{7}{40}=12\frac{7}{40};$

б) $3\frac{9}{11}-1\frac{2}{5}=3-1+\frac{^{5/}9}{11}-\frac{^{11/}2}{5}=2+\frac{45-22}{45}=2\frac{23}{45};$

в) $5\frac{1}{4}-1\frac{3}{8}=5-1+\frac{^{2/}1}{4}-\frac{3}{8}=4+\frac{2-3}{8}=3+\frac{8}{8}-\frac{1}{8}=3\frac{7}{8};$

г) $7\frac{7}{9}-4\frac{1}{12}+2\frac{3}{4}=7-4+2+\frac{^{4/}7}{9}-\frac{^{3/}1}{12}+\frac{^{9/}3}{4}=5+\frac{28-3+27}{36}=$

$=5+\frac{52}{36}=5+\frac{13}{9}=5+\frac{9}{9}+\frac{4}{9}=6\frac{4}{9}.$

Умножение дробей

1. Произведение двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей:
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$
2. При умножении чисел, состоящих из целой и дробной частей, их предварительно представляют в виде неправильных дробей, а затем умножают согласно п. 1.

Пример 3.

а) $\frac{7}{12}\cdot 24=\frac{7}{12}\cdot\frac{24}{1}=\frac{7\cdot\cancel{24}^{2}}{\cancel{12}^{1}\cdot 1}=\frac{14}{1}=14;$

б) $\frac{13}{24}\cdot\frac{16}{39}=\frac{\cancel{13}^{1}\cdot\cancel{16}^{2}}{\cancel{24}^{3}\cdot\cancel{39}^{3}}=\frac{2}{9};$

в) $19\frac{1}{2}\cdot 1\frac{5}{9}=\frac{19\cdot 2+1}{2}\cdot\frac{1\cdot 9+5}{9}=\frac{\cancel{39}^{13}\cdot\cancel{14}^{7}}{\cancel{2}^{1}\cdot\cancel{9}^{3}}=\frac{91}{3}=30\frac{1}{3};$

г) $2\frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{24}\cdot 5\frac{2}{5}=\frac{\cancel{8}^{1}\cdot\cancel{25}^{1}\cdot\cancel{27}^{9}}{\cancel{3}^{1}\cdot\cancel{24}^{3}\cdot\cancel{25}^{1}}=\frac{9}{3}=3;$

д) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3}=\frac{27}{343};$

е) $\left(3\frac{1}{4}\right)^{2}=\left(\frac{13}{4}\right)^{2}=\frac{169}{16}=10\frac{9}{16}.$

Деление дробей

Два числа называются **взаимно обратными**, если их произведение равно 1, т. е. дроби вида $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ являются взаимно обратными, например $\frac{1}{3}$ и 3; $\frac{2}{7}$ и $\frac{7}{2}$.

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно делимое умножить на число, обратное к делителю:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

$1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$; $\quad 0 : \frac{a}{b} = 0$; $\quad \cancel{\frac{a}{b} : 0}$ — на нуль делить нельзя

При делении чисел, состоящих из целой и дробной части, нужно предварительно представить их в виде дроби и применить правило согласно п. 1.

Пример 4.

а) $\frac{21}{40} : \frac{3}{4} = \frac{\cancel{21}^{7} \cdot \cancel{4}^{1}}{\cancel{40}^{10} \cdot \cancel{3}^{1}} = \frac{7}{10}$;

б) $8 : \frac{3}{5} = \frac{8}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$;

в) $\frac{12}{25} : 4 = \frac{12}{25} : \frac{4}{1} = \frac{\cancel{12}^{3} \cdot 1}{25 \cdot \cancel{4}^{1}} = \frac{3}{25}$;

г) $5\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9} = \frac{16}{3} : \frac{14}{9} = \frac{\cancel{16}^{3} \cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}^{2} \cdot \cancel{14}^{7}} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$;

д) $3\frac{3}{8} : \frac{3}{8} : 1\frac{3}{7} = \frac{27}{8} : \frac{3}{8} : \frac{10}{7} = \frac{\cancel{27}^{9} \cdot \cancel{8}^{1} \cdot 7}{\cancel{8}^{1} \cdot \cancel{3}^{1} \cdot 10} = \frac{63}{10} = 6\frac{3}{10}$.

1.2.3. Нахождение части от целого и целого по его части

Нахождение части от целого (дроби от числа)

Чтобы найти **часть от целого**, нужно число, соответствующее целому, разделить на знаменатель дроби, выражающей эту часть, и результат умножить на числитель той же дроби.

Пример 1. На участке растет 36 деревьев. Из них $\frac{5}{9}$ — вишни. Сколько вишен растет на участке?

Решение:

1) 36 : 9 = 4 (дерева) — это $\frac{1}{9}$ всех деревьев; 2) $4 \cdot 5 = 20$ (деревьев) — это $\frac{5}{9}$ всех деревьев.

Ответ: 20 деревьев.

Задача нахождения части от целого по существу является задачей нахождения **дроби от числа**.

Чтобы найти **дробь (часть) от числа**, необходимо число **умножить** на эту дробь.

Пример 2. Решим предыдущую задачу умножением числа 36 на дробь $\frac{5}{9}$.

Решение:

$$36 \cdot \frac{5}{9} = \frac{36 \cdot 5}{9} = 20 \text{ (деревьев).}$$

Ответ: 20 деревьев.

Пример 3. Среди 420 000 жителей города $\frac{1}{6}$ часть жителей не интересуется футболом и не смотрит футбольные матчи по телевизору. Остальные являются футбольными болельщиками. Среди болельщиков $\frac{5}{7}$ смотрит по телевизору финальный матч чемпионата Европы. Сколько жителей города не смотрело этот матч?

Решение:

1) $420\,000 \cdot \frac{1}{6} = 70\,000$ (жителей) — не интересуются футболом;

2) 420 000 − 70 000 = 350 000 (жителей) — футбольные болельщики;

3) $350\,000 \cdot \frac{5}{7} = 250\,000$ (жителей) — смотрели матч;

4) 420 000 − 250 000 = 170 000 — не смотрели матч.

Ответ: 170 000 человек.

Нахождение целого по его части (числа по его дроби)

Чтобы найти **целое по его части**, нужно число, соответствующее этой части, разделить на числитель дроби, выражающей эту часть, и результат умножить на знаменатель той же дроби.

Пример 4. За первый день лыжники прошли 38 км, что составляет $\frac{2}{7}$ длины маршрута. Какова длина маршрута?

Решение:

1) 38 : 2 = 19 (км) — это $\frac{1}{7}$ всего маршрута;

2) 19 · 7 = 133 (км) — длина маршрута.

Ответ: 133 км.

Задача нахождения целого по его части по существу является задачей **нахождения числа по его дроби**.

Чтобы найти **число по его дроби**, необходимо данное значение **разделить** на эту дробь.

Пример 5. Решим предыдущую задачу делением числа 38 на $\frac{2}{7}$.

Решение:

$$38 : \frac{2}{7} = \frac{38 \cdot 7}{2} = 133 \text{ (км).}$$

Ответ: 133 км.

Пример 6. Трое мышей нашли головку сыра. Одна мышь съела $\frac{7}{12}$ головки сыра, другая — $\frac{7}{15}$ остатка, а третья — остальные $1\frac{2}{3}$ кг сыра. Найти массу головки сыра.

Решение:

Примем целую головку сыра за 1. Тогда, после того как первая мышь съела $\frac{7}{12}$ головки, осталось: $1-\frac{7}{12}=\frac{12}{12}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$ части сыра. Вторая мышь съела $\frac{7}{15}$ остатка, т. е.: $\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{15}=\frac{\cancel{5}^{1}\cdot 7}{12\cdot\cancel{15}^{3}}=\frac{7}{36}$ части сыра. Тогда третьей мыши досталось: $\frac{^{3/}5}{12}-\frac{7}{36}=\frac{15-7}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ части сыра, что составляет $1\frac{2}{3}$ кг. Тогда масса всей головки сыра составит: $1\frac{2}{3}$ кг $:\frac{2}{9}=\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$ (кг).

Ответ: $7\frac{1}{2}$ кг.

1.2.4. Десятичная дробь, сравнение десятичных дробей

Дробные числа, знаменатель которых равен 10, 100, 1000 и т. д., можно записать не только в виде обыкновенных, но и в виде десятичных дробей.

Обыкновенные дроби	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{23}{10}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{133}{100}$	$\frac{3}{1000}$	$\frac{7371}{1000}$
Десятичные дроби	0,1	0,3	2,3	0,27	0,01	1,33	0,003	7,371

Десятичные дроби записывают аналогично записи многозначных натуральных чисел.

…	тысячи	сотни	десятки	единицы	,	десятые	сотые	тысячные	десяти-тысячные	…
		3	2	7	,	0	5	2	8	

Например, число 327,0528 имеет 3 сотни, 2 десятка, 7 единиц, 0 десятых, 5 сотых, 2 тысячных, 8 десятитысячных.

Если дробь правильная, то перед запятой в записи десятичной дроби ставят цифру 0, например $\frac{17}{100}=0{,}17$.

Сравнение десятичных дробей

1. Из двух десятичных дробей больше та, у которой целая часть больше:
$$7{,}99 > 6{,}399;\ 100{,}1 < 999{,}99;\ 9{,}99 > 0{,}99.$$
2. Если целые части дробей равны, то больше та дробь, у которой десятых больше. Если и десятые равны, то больше та дробь, у которой больше сотых, и т. д.:
$$85{,}7 > 85{,}679;\ 35{,}87 > 35{,}8695;\ 5{,}09 < 5{,}1;\ 77{,}9 > 77{,}009.$$

1.2.5. Арифметические действия с десятичными дробями

Сложение и вычитание десятичных дробей

Чтобы сложить (вычесть) десятичные дроби, нужно:
1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
4) поставить в ответе запятую под запятой в данных дробях.

Пример 1.

а) 0,4 + 37,023;

$$\begin{array}{r} 0,400 \\ +\;37,023 \\ \hline 37,423 \end{array}$$

б) 100 − 3,02;

$$\begin{array}{r} 100,00 \\ -\;3,02 \\ \hline 96,98 \end{array}$$

в) 15,23 + 0,3 + 115;

$$\begin{array}{r} 15,23 \\ +\;0,30 \\ 115,00 \\ \hline 130,53 \end{array}$$

Умножение десятичных дробей

При умножении десятичных дробей сначала нужно выполнить умножение, не обращая внимания на запятую, а затем в произведении отделить запятой справа столько знаков, сколько их имеется после запятой в обоих множителях вместе.

Пример 2.

а)
$$\begin{array}{r} 0,215 \\ \times\;0,03 \\ \hline 0,00645 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} 0,15 \\ \times\;0,006 \\ \hline 0,00090 \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\;0,003 \\ \hline 0,045 \end{array}$$

Умножение десятичной дроби на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Чтобы умножить десятичную дробь на 0,1; 0,01; 0,001, нужно перенести запятую влево на сколько цифр, сколько нулей стоит перед единицей в множителе.

Пример 3.

а) $23,571 \cdot 0,1 = 2,3571$;
б) $5,3 \cdot 0,1 = 0,53$;
в) $0,37 \cdot 0,1 = 0,037$;
г) $75 \cdot 0,01 = 0,75$;
д) $4,2 \cdot 0,01 = 0,042$;
е) $0,1 \cdot 0,0001 = 0,00001$.

Деление десятичных дробей

Чтобы разделить десятичную дробь на натуральное число, нужно:
1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;
2) поставить в частном запятую после того, как закончено деление целой части;
3) если целая часть меньше делителя, то частное начинается с нуля целых.

Пример 4.

а)
$$\begin{array}{r|l} -\,30{,}6 & 9 \\ 27 & \overline{3{,}4} \\ \hline -\,36 & \\ 36 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} -\,3{,}56 & 4 \\ 32 & \overline{0{,}89} \\ \hline -\,36 & \\ 36 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r|l} -\,1 & 80 \\ 0 & \overline{0{,}0125} \\ \hline -\,10 & \\ 0 & \\ \hline -\,100 & \\ 80 & \\ \hline -\,200 & \\ 160 & \\ \hline -\,400 & \\ 400 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д.

Чтобы разделить десятичную дробь на 10, 100, 1000, ..., нужно перенести **влево** запятую в этой дроби на сколько цифр, сколько нулей стоит после единицы в делителе.

Пример 5.

а) 571 : 10 = 57,1;
б) 241,3 : 100 = 2,413;
в) 5,35 : 100 = 0,0535;
г) 6,51 : 1000 = 0,00651;
д) 2 : 1000 = 0,002;
е) 57 : 10 000 = 0,0057.

Деление числа на десятичную дробь

Чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно:
1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на сколько цифр, сколько их после запятой в делителе;
2) выполнить деление на натуральное число.

Пример 6.

а) 8,46 : 0,6 = 84,6 : 6 = 14,1;
б) 0,00612 : 0,03 = 0,612 : 3 = 0,204;
в) 27 : 0,15 = 2700 : 15 = 180.

Деление десятичной дроби на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Чтобы разделить десятичную дробь на 0,1; 0,01; 0,001, нужно перенести в ней запятую **вправо** на столько цифр, сколько нулей стоит в делителе перед единицей (т. е. умножить дробь на 10, 100, 1000, ...).

Пример 7.

а) 37,89 : 0,1 = 378,9;
б) 37,89 : 0,01 = 3 789;
в) 37,89 : 0,001 = 37 890;
г) 37,89 : 0,0001 = 378 900.

1.2.6. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной и обыкновенной в виде десятичной

Чтобы обратить **десятичную дробь в обыкновенную**, достаточно в числителе дроби записать число, стоящее после запятой, а в знаменателе — единицу с нулями, причем нулей должно быть столько, сколько цифр справа от запятой. Если можно, дробь сократить.

Пример 1. $0,3 = \dfrac{3}{10}$; $0,25 = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$; $0,006 = \dfrac{6}{1000} = \dfrac{3}{500}$; $10,02 = 10\dfrac{2}{100} = 10\dfrac{1}{50}$.

Чтобы обратить **обыкновенную дробь в десятичную**, следует разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число.

Пример 2. $\dfrac{7}{25} = 0,28$;

$$\begin{array}{r|l} -\,7{,}0 & 25 \\ 50 & \overline{0{,}28} \\ \hline -\,200 & \\ 200 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Не каждую обыкновенную дробь можно перевести в десятичную.

Если знаменатель обыкновенной дроби **не содержит** простых множителей, кроме 2 и 5, то эту обыкновенную дробь **можно** перевести в десятичную.

Учитывая это правило, можно переводить обыкновенную дробь в десятичную не с помощью деления, а приведением ее к знаменателю 10, 100, 1000 путем умножения числителя и знаменателя этой дроби на недостающие множители.

Пример 3. Заметим, что при разложении чисел 10, 100, 1000 и т. д. получается одинаковое количество двоек и пятерок. Представим в виде десятичных следующие дроби: а) $\dfrac{4}{25}$; б) $\dfrac{5}{8}$; в) $1\dfrac{7}{20}$.

Решение:

а) $\dfrac{4}{25} = \dfrac{4}{5\cdot 5} = \dfrac{4\cdot 2\cdot 2}{5\cdot 2\cdot 5\cdot 2} = \dfrac{16}{100} = 0,16$;

б) $\dfrac{5}{8} = \dfrac{5}{2\cdot 2\cdot 2} = \dfrac{5\cdot 5^3}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5} = \dfrac{5^4}{1000} = 0,625$;

в) $1\dfrac{7}{20} = 1\dfrac{7}{2\cdot 2\cdot 5} = 1\dfrac{7\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 5} = 1\dfrac{35}{100} = 1,35$.

1.3. Рациональные числа

1.3.1. Целые числа

Координатная прямая — это прямая с указанными на ней началом отсчета (точка O), направлением отсчета (указано стрелкой) и единичным отрезком ($OA = 1$).

Числа, расположенные на координатной прямой справа от нуля, называют **положительными**, а слева — **отрицательными**. Число нуль не является ни положительным, ни отрицательным.

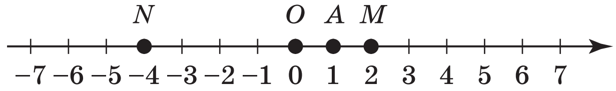


Рис. 1.1

Точка A изображает число 1, которое называют координатой точки A и записывают: $A(1)$. Аналогично записывают: $O(0)$; $M(2)$; $N(-4)$.

Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются **противоположными числами**.

Например, 1 и −1, 2 и −2, 7 и −7 — противоположные числа.

На координатной прямой противоположные числа расположены симметрично относительно начала отсчета.

Числа натуральные, им противоположные, а также число нуль составляют **множество целых чисел**. Оно обозначается Z.

Например, $5 \in Z$ (число пять принадлежит множеству целых чисел), $-7 \in Z$, $-3\frac{1}{2} \notin Z$ (число $-3\frac{1}{2}$ не является целым числом).

Каждому целому числу можно поставить в соответствие единственную точку на координатной прямой.

Иногда натуральные числа называют **целыми положительными**, а числа −1, −2, −3, ... — **целыми отрицательными**.

Целые числа		
Целые положительные: 1, 2, 3, 4, ...	0	Целые отрицательные: −1, −2, −3, −4, ...

Пример 1. Какие целые числа расположены между: а) −4 и 2; б) −1,9 и 3,2; в) $-\frac{7}{8}$ и $\frac{7}{8}$?

Ответ: а) −3; −2; −1; 0; 1; б) −1; 0; 1; 2; 3; в) 0.

Пример 2. Сколько целых чисел расположено на координатной прямой между числами −154 и 61?

Решение:

Слева от нуля расположены числа от −152 до −1 включительно, т. е. их 153, далее само число нуль и положительные числа от 1 до 60, т. е. 60 чисел. Всего: $152 + 1 + 60 = 214$.

Ответ: 214 чисел.

1.3.2. Модуль (абсолютная величина) числа

Модулем числа a называют расстояние от начала отсчета до точки, которая изображает это число на координатной прямой.

Рис. 1.2

$$|-4| = 4;\ |4| = 4;\ |0| = 0.$$

Модуль **положительного** числа равен самому числу, модуль **отрицательного** числа равен числу, противоположному данному:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \text{ т. е. } a \text{ — неотрицательное число,} \\ -a, & \text{если } a < 0, \text{ т. е. } a \text{ — отрицательное число.} \end{cases}$$

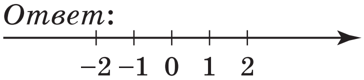
Модуль любого числа есть величина неотрицательная.

Модули противоположных чисел равны:

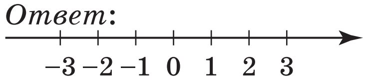
$$|a| = |-a|.$$

Пример 1. Изобразить на координатной прямой целые значения x, при которых верно неравенство:

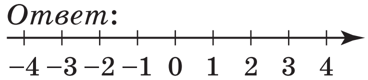
а) $|x| < 3$;
Ответ:



б) $|x| \leq 3$;
Ответ:



в) $2 < |x| < 5$.
Ответ:



Пример 2. Решить уравнения: а) $|x| = 7$; б) $|x| = -9$; в) $|x| = 0$; г) $|x - 4| = 3$.

Решение:

а) $|x| = 7$. $x_1 = 7$; $x_2 = -7$;
б) $|x| = -9$. Решений нет, поскольку $|x| \geq 0$;
в) $|x| = 0$. $x = 0$;
г) $|x - 4| = 3$. $x - 4 = 3$ или $x - 4 = -3$; $x_1 = 7$ или $x_2 = 1$.
Ответ: а) -7; 7; б) решений нет; в) 0; г) 1 и 7.

Пример 3. Записать выражение без знака модуля: а) $|a - 2|$; б) $5|a + 2|$.

Решение:

По определению модуля имеем:

а) $|a-2| = \begin{cases} a-2, \text{ если } a-2 \geq 0, \\ -(a-2), \text{ если } a-2 < 0 \end{cases}$ или $|a-2| = \begin{cases} a-2, \text{ если } a \geq 2, \\ -a+2, \text{ если } a < 2; \end{cases}$

б) $5|a+2| = \begin{cases} 5(a+2), \text{ если } a+2 \geq 0, \\ -5(a+2), \text{ если } a+2 < 0 \end{cases}$ или $5|a+2| = \begin{cases} 5a+10, \text{ если } a \geq -2, \\ -5a-10, \text{ если } a < -2. \end{cases}$

1.3.3. Сравнение рациональных чисел

Число, которое можно записать в виде отношения $p = \dfrac{a}{n}$, где a — целое число, а n — натуральное, называют **рациональным числом**.

Например, числа 0,27; $3\dfrac{2}{7}$; −3,5; 10; −3; 0 являются рациональными, поскольку $0{,}27 = \dfrac{27}{100}$; $3\dfrac{2}{7} = \dfrac{23}{7}$; $-3{,}5 = \dfrac{-7}{2}$; $10 = \dfrac{10}{1}$; $-3 = \dfrac{-3}{1}$; $0 = \dfrac{0}{1}$.

Рациональные числа включают в себя целые и дробные числа.

Рациональные числа	
Целые числа: −3; 0; 1; 15; ...	Дробные числа: $\dfrac{2}{3}$; 0,33; −7,5; ...

Множество рациональных чисел обозначают Q.

На множестве Q можно производить действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на 0). Каждому рациональному числу можно поставить в соответствие единственную точку на координатной прямой.

Из двух рациональных чисел **больше** то число, которое на координатной прямой расположено правее. Следовательно:

а) всякое положительное число больше нуля и больше любого отрицательного:

$$-10 < 1;\ 0 < 1;\ 5 > -5\ 000;$$

б) всякое отрицательное число меньше нуля:

$$-7 < 0;\ -0{,}1 < 0;\ 0 > -1\ 000;$$

в) из двух отрицательных чисел **больше** то число, модуль **которого меньше**:

$$-3 > -5, \text{ т. к. } |-3| < |-5|.$$

Пример 1. Между какими соседними целыми числами лежит число:

а) $3\frac{9}{17}$; б) $-8{,}4$; в) $-0{,}17$?

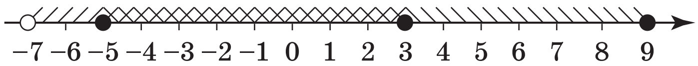
Ответ: а) $3 < 3\frac{9}{17} < 4$; б) $-9 < -8{,}4 < -8$; в) $-1 < -0{,}17 < 0$.

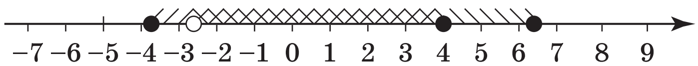
Пример 2. Записать три последовательных целых числа, бóльшее из которых: а) 3; б) −8; в) 0.

Ответ: а) 1; 2; 3; б) −10; −9; −8; в) −2; −1; 0.

Пример 3. Найти все целые значения x, при которых будут верны одновременно оба неравенства: а) $-7 < x < 3$ и $-5 \le x \le 9$; б) $-3{,}8 \le x \le 4$ и $-2{,}6 < x < 6{,}3$.

Решение:

а) 

б) 

Ответ: а) −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; б) −2; −1; 0; 1; 2; 3; 4.

1.3.4. Арифметические действия с рациональными числами

Сложение и вычитание рациональных чисел

1. При сложении рациональных чисел с **одинаковыми знаками** нужно сложить их модули и перед суммой поставить их общий знак.

Пример 1.

а) $(-6) + (-3{,}7) = -(6 + 3{,}7) = -9{,}7$;

б) $-5\frac{7}{8} + \left(-6\frac{{}^{2/}3}{4}\right) = -\left(5\frac{7}{8} + 6\frac{6}{8}\right) = -11\frac{13}{8} = -12\frac{5}{8}$.

2. При сложении двух рациональных чисел с **разными знаками** модуль суммы равен разности модулей слагаемых. Знак суммы совпадает со знаком слагаемого, имеющего бóльший модуль.

Пример 2.

а) $4 + (-10) = -(10 - 4) = -6$;

б) $5{,}6 + (-4{,}1) = (5{,}6 - 4{,}1) = 1{,}5$;

в) $-11\frac{7}{9} + 8\frac{{}^{3/}2}{3} = -\left(11\frac{7}{9} - 8\frac{6}{9}\right) = -3\frac{1}{9}$.

3. Сумма **противоположных** чисел равна нулю.

Пример 3.
а) $-4 + 4 = 0$; б) $\frac{3}{8} + \left(-\frac{3}{8}\right) = 0$.

4. Чтобы **вычесть** из числа a число b, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

Пример 4.
а) $-7 - 3 = -7 + (-3) = -10$;
б) $-5 - (-11,3) = -5 + 11,3 = 6,3$;
в) $2\frac{9}{20} - 4\frac{17}{30} = 2\frac{9}{20} + \left(-4\frac{17}{30}\right) = 2 + (-4) + \frac{^{3/}9}{20} + \left(-\frac{^{2/}17}{30}\right) =$
$= -2 + \frac{27}{60} + \left(-\frac{34}{60}\right) = -2 + \left(-\frac{7}{60}\right) = -2\frac{7}{60}$.

Свойства сложения

Для любых рациональных чисел a, b и c выполняются равенства:
1) переместительное свойство: $a + b = b + a$;
2) сочетательное свойство: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Пример 5.
а) $-6,38 + (-1,73) + 5,38 + 1,73 = (-1,73 + 1,73) + (-6,38 + 5,38) = 0 - 1 = -1$;
б) $-\frac{9}{40} + \frac{13}{50} + \left(-\frac{23}{50}\right) + \frac{19}{40} = \left(-\frac{9}{40} + \frac{19}{40}\right) + \left(\frac{13}{50} + \left(-\frac{23}{50}\right)\right) = \frac{10}{40} + \left(-\frac{10}{50}\right) =$
$= \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{20} + \left(-\frac{4}{20}\right) = \frac{1}{20}$.

Умножение и деление рациональных чисел

1. Произведение (частное) чисел **одного знака** есть число **положительное**.

Пример 6.
а) $(-6) \cdot (-2,1) = 12,6$;
б) $-\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{8}$;
в) $(-72) : (-6) = 12$;
г) $-22 : \left(-\frac{11}{17}\right) = \frac{22 \cdot 17}{11} = 34$.

2. Произведение (частное) двух чисел с **разными знаками** есть число **отрицательное**.

Пример 7.
а) $(-10) \cdot \frac{1}{5} = -2$;
б) $\frac{2}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$;
в) $24 : (-3) = -8$;
г) $-5 : 8 = -\frac{5}{8}$.

Свойства умножения

Для любых рациональных чисел a, b и c справедливы равенства:
1) действия с нулем и единицей: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; $a \cdot (-1) = -a$;

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;\ (-1) \cdot a = -a.$$

2) переместительное свойство: $a \cdot b = b \cdot a$.
сочетательное свойство: $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$;
3) распределительное свойство: $a(b + c) = ab + ac$;

Свойства деления

$a : 1 = a$	$a : (-1) = -a$	$a : a = 1$	$a : (-a) = -1$
$0 : a = 0$	$\cancel{a : 0}$ — на нуль делить нельзя		

Пример 8. Вычислить наиболее удобным способом:

а) $-4 \cdot 2{,}3 \cdot (-0{,}5) = (-4 \cdot (-0{,}5)) \cdot 2{,}3 = 2 \cdot 2{,}3 = 4{,}6$;

б) $-\dfrac{5}{18} \cdot \left(-\dfrac{4}{13}\right) \cdot \dfrac{9}{25} \cdot (-26) = -\left(\dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{9}{25}\right) \cdot \left(\left(-\dfrac{4}{13}\right) \cdot (-26)\right) =$

$= -\dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{4 \cdot 26}{13} = -\dfrac{1}{10} \cdot 8 = -\dfrac{8}{10} = -0{,}8;$

в) $-32{,}3 \cdot 7\dfrac{10}{13} + 2\dfrac{3}{13} \cdot (-32{,}3) = -32{,}3 \cdot \left(7\dfrac{10}{13} + 2\dfrac{3}{13}\right) =$

$= -32{,}3 \cdot 9\dfrac{13}{13} = -32{,}3 \cdot 10 = -323.$

1.3.5. Степень с целым показателем

Множество целых чисел Z — это множество, состоящее из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным. Поэтому понятие степени a^n ($n \in$ N) можно расширить, если рассмотреть случаи, когда n — целое отрицательное число и $n = 0$.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \text{ и } a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$
если $a \neq 0$ и n — целое число

$a^0 = 1$, если $a \neq 0$

0^0 и 0^{-n}, $n \in$ N не определено

Пример 1. а) $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$; б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}$.

Пример 2. $1^0 = 1$; $(-3{,}7)^0 = 1$; $\left(\dfrac{2}{7}\right)^0 = 1$.

Свойства степени с целым показателем

Пусть a — любое число, m и n — целые числа.

Свойства	Примеры
$a^m \times a^n = a^{m+n}$, $a \neq 0$	$5^{-12} \cdot 5^{10} = 5^{-12+10} = 5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

Окончание таблицы

Свойства	Примеры
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\ a \neq 0$	а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 : \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{5-7} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4;$ б) $3^6 : 3^9 = 3^{6-9} = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$
$(a^m)^n = a^{mn};\ a \neq 0$	а) $((0{,}2)^{-3})^{-1} = 0{,}2^{-3\cdot(-1)} = 0{,}2^3 = 0{,}008;$ б) $\dfrac{3^{-3}\cdot 27^2}{9^{-2}} = \dfrac{3^{-3}\cdot(3^3)^2}{(3^2)^{-2}} = \dfrac{3^{-3}\cdot 3^6}{3^{-4}} = 3^{-3+6-(-4)} = 3^{-3+6+4} = 3^7$
$(ab)^n = a^n b^n,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	а) $\left(-\dfrac{3}{5}a^{-3}b\right)^{-2} = \dfrac{9}{25}a^6 b^{-2} = \dfrac{9a^6}{25b^2};$ б) $0{,}125^{-7}\cdot 8^{-7} = (0{,}125\cdot 8)^{-7} = 1^{-7} = 1$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n},\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\left(\dfrac{3a^4x^{-2}}{2b}\right)^{-3} = \dfrac{3^{-3}a^{-12}x^6}{2^{-3}b^{-3}} = \dfrac{2^3b^3x^6}{3^3a^{12}} = \dfrac{8b^3x^6}{27a^{12}}$

Пример 3. Вычислить:

а) $3^{-2} + (-2)^{-3} = \dfrac{1}{3^2} + \left(-\dfrac{1}{2^3}\right) = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{8-9}{72} = -\dfrac{1}{72};$

б) $(0{,}1)^{-2} + (0{,}5)^{-4} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = 10^2 + 2^4 = 100 + 16 = 116;$

в) $((-10)^7)^{-7} : ((-10)^{-6})^8 + 3^{-2} = (-10)^{-49} : (-10)^{-48} + \dfrac{1}{3^2} = (-10)^{-1} + \dfrac{1}{9} =$

$= -\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{-9+10}{90} = \dfrac{1}{90}.$

Стандартный вид числа

Стандартным видом числа называется его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a \leq 10$, n — целое число. Число n называют **порядком числа**.

Пример 4. Представить число в стандартном виде:

а) $1\,370\,000 = 1{,}37 \cdot 10^6;$
б) $0{,}00000071 = 7{,}1 \cdot 10^{-7};$
в) $(1{,}1 \cdot 10^{-2}) \cdot (3 \cdot 10^{-6}) = 1{,}1 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} = 3{,}3 \cdot 10^{-8};$
г) $(9{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot (3 \cdot 10^5) = (9{,}1 \cdot 3) \cdot (10^{-3} \cdot 10^5) = 27{,}3 \cdot 10^2 = 2{,}73 \cdot 10^3;$
д) $(6{,}1 \cdot 10^{-4}) \cdot (2 \cdot 10^{-6}) = (6{,}1 \cdot 2) \cdot (10^{-4} \cdot 10^{-6}) = 12{,}2 \cdot 10^{-10} = 1{,}22 \cdot 10^{-9};$
е) $2{,}3 \cdot 10^{-2} + 1{,}5 \cdot 10^{-3} = 2{,}3 \cdot 10^{-2} + 0{,}15 \cdot 10^{-2} = (2{,}3 + 0{,}15) \cdot 10^{-2} = 2{,}45 \cdot 10^{-2}.$

1.3.6. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок. Законы арифметических действий

Числовое выражение — это математическая запись, содержащая числа, скобки и знаки действий.

Например: $(2{,}3 - 1{,}8)^2$; $\left(\frac{3}{8}+1{,}3\right)\cdot\left(\frac{3}{8}-1{,}3\right)$.

Значением числового выражения называется число, которое получается в результате выполнения действия. Каждое числовое выражение имеет единственное значение или не имеет его совсем.

Например, число 1 является значением числового выражения $(3{,}7 - 2{,}7)^2$, а выражение $\frac{3{,}5}{2-2}$ не имеет значения.

Выражения, содержащие **деление на нуль**, не имеют значения, поскольку это действие невозможно выполнить. О таком выражении говорят, что оно **не имеет смысла**.

Для того чтобы найти значение выражения, необходимо соблюдать **порядок действий**.

Действия **первой ступени** — сложение и вычитание; действия **второй ступени** — умножение и деление; действие **третьей ступени** — возведение в степень.

Порядок выполнения действий в числовом выражении

1. Если выражение содержит скобки, то сначала выполняются действия в скобках. Если внутри скобок содержатся другие скобки, то сначала выполняются действия во внутренних скобках.
2. Сначала выполняются действия высшей ступени, затем низшей.
3. Действия одной и той же степени выполняются в том порядке, в котором они стоят в выражении.

Пример 1. Найти значение выражения: $17 - (91{,}1 - 101{,}1)^2 + (2{,}3 - 1{,}3)^7 : (-2)^3$.

Решение:

1) $91{,}1 - 100{,}1 = -10$;
2) $(-10)^2 = 100$;
3) $17 - 100 = -83$;
4) $2{,}3 - 1{,}3 = 1$;
5) $1^7 = 1$;
6) $(-2)^3 = -8$;
7) $1 : (-8) = -0{,}125$;
8) $-83 + (-0{,}125) = -83{,}125$.

Ответ: $-83{,}125$.

Правило раскрытия скобок

1. Если перед скобками **стоит знак «+»**, то, раскрывая скобки, можно:
   а) опустить скобки и знак «+»;
   б) записать слагаемые, стоящие в скобках, сохранив их знаки;
   в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «+».

Пример 1.

а) $-7{,}21 + (3{,}5 + 7{,}21) = -7{,}21 + 3{,}5 - 7{,}21 = 3{,}5$;

б) $3{,}7 + (-2{,}3 + 5) = 3{,}7 - 2{,}3 + 5 = 6{,}4$.

2. Если перед скобками **стоит знак «–»**, то, раскрывая скобки, можно:
   а) опустить скобки и знак «–»;
   б) записать слагаемые, стоящие в скобках, поменяв знаки всех слагаемых на противоположные;
   в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «–».

Пример 2.
а) $-2{,}5 - (5{,}6 + 2{,}5) = -2{,}5 - 5{,}6 - 2{,}5 = -10{,}6$;
б) $-7{,}8 - (-3{,}2 - 6{,}8) = -7{,}8 + 3{,}2 + 6{,}8 = 2{,}2$.

Законы арифметический действий — см. п. 1.3.4.

1.4. Действительные числа

1.4.1. Квадратный корень из числа

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Например, квадратными корнями из числа 16 являются числа 4 и −4, поскольку $4^2 = 16$ и $(-4)^2 = 16$.

Из отрицательного числа квадратного корня не существует.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Например, арифметическим квадратным корнем из числа 36 является число 6.

Для обозначения квадратного корня используют знак $\sqrt{\ }$.

Запись $\sqrt{m}$ читают так: «Арифметический квадратный корень из m» или просто: «Квадратный корень из m», при этом число m называют **подкоренным выражением**.

Например: $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{\dfrac{9}{121}} = \dfrac{3}{11}$.

Действие, посредством которого находится квадратный корень, называется **извлечением квадратного корня**.

Итак, определение квадратного корня можно записать следующим образом:

$$\boxed{\text{если } a \geq 0 \text{ и } b^2 = a, \text{ то } \sqrt{a} = b}$$

Из этого определения следует, что $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, если $a \geq 0$.

Например: $\left(\sqrt{1,7}\right)^2 = 1,7$; $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$, но выражение $\left(\sqrt{-3}\right)^2$ не имеет смысла.

Свойства арифметического квадратного корня

Свойства	Примеры
Квадратный корень из произведения: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ при $a \geq 0$ и $b \geq 0$	а) $\sqrt{1,69 \cdot 900} = \sqrt{1,69} \cdot \sqrt{900} = 1,3 \cdot 30 = 39$; б) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{72 \cdot 2} = \sqrt{144} = 12$; в) $\sqrt{45 \cdot 80} = \sqrt{(9 \cdot 5) \cdot (16 \cdot 5)} = \sqrt{9 \cdot 25 \cdot 16} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$
Квадратный корень из дроби: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geq 0$ и $b > 0$	а) $\sqrt{\dfrac{36}{49}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \dfrac{6}{7}$; б) $\sqrt{6\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \dfrac{5}{2} = 2\dfrac{1}{2}$;

	в) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{3}{27}}=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$; г) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{5}{72}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{5}{72}}=\sqrt{\dfrac{1}{36}}=\dfrac{1}{6}$
Квадратный корень из степени: а) $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$ б) $\sqrt{a^{2k}}=\lvert a^k\rvert$, где a — любое число	а) $\sqrt{(-5)^2}=\lvert -5\rvert=5$; б) $\sqrt{m^2}=\lvert m\rvert$; в) $\sqrt{a^{12}}=a^6$; поскольку $a^6\geq 0$; г) $\sqrt{b^{10}}=\lvert b^5\rvert=\begin{cases}b^5, b\geq 0,\\ -b^5, b<0;\end{cases}$ д) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-7\right)^2}+\sqrt{3}=\lvert\sqrt{3}-7\rvert+\sqrt{3}=-\sqrt{3}+7+\sqrt{3}=7$, поскольку $\sqrt{3}<7$ и $\sqrt{3}-7<0$; е) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2}=$ $=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\lvert\sqrt{2}-1\rvert=\sqrt{2}-1$, т. е. $\sqrt{2}>1$ и $\sqrt{2}-1>0$

Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

1. **Простейшие преобразования.**

а) $5\sqrt{2}+4\sqrt{2}=9\sqrt{2}$;

б) $7\sqrt{3}-3\sqrt{3}=4\sqrt{3}$;

в) $6\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}=30\sqrt{6}$;

г) $\sqrt{7}+3\sqrt{7}=4\sqrt{7}$;

д) $4\sqrt{a}\cdot\left(-2\sqrt{b}\right)=-8\sqrt{ab}$;

е) $12\sqrt{6}:3\sqrt{3}=\dfrac{12\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=4\sqrt{2}$;

ж) $\left(3\sqrt{2}\right)^2=3^2\left(\sqrt{2}\right)^2=9\cdot 2=18$.

2. **Вынесение множителя из-под знака корня.**

а) $\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=3\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{1}{2}\sqrt{32}=\dfrac{1}{2}\sqrt{16\cdot 2}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{5a^2}=\lvert a\rvert\sqrt{5}=\begin{cases}a\sqrt{5}, \text{ если } a\geq 0,\\ -a\sqrt{5}, \text{ если } a<0.\end{cases}$

3. **Внесение множителя под знак корня.**

а) $2\sqrt{7}=\sqrt{2^2\cdot 7}=\sqrt{4\cdot 7}=\sqrt{28}$;

б) $a\sqrt{5}=\sqrt{5a^2}$, если $a\geq 0$; $a\sqrt{5}=-\sqrt{5a^2}$, если $a<0$.

4. **Освобождение от иррациональности в знаменателе или числителе дроби.**

В числителе:

а) $\dfrac{\sqrt{5}}{7}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{7\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{5}{7\sqrt{5}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{2}{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$.

В знаменателе:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$;

в) $\dfrac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \dfrac{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$;

г) $\dfrac{5}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \dfrac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1} = \dfrac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.

Пример 1. Упростить выражение:

а) $\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$; б) $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)$; в) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{10}$.

Решение:

а) $\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{50} = \sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-5\sqrt{2} = 0$;

б) $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^2-3^2 = 4\cdot 3-9 = 12-9 = 3$;

в) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{10} = \left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{10} =$

$= 5-2\sqrt{10}+2+2\sqrt{10} = 7$.

Пример 2. Разложить на множители:

а) $\sqrt{18}-\sqrt{3}$; б) $a+\sqrt{a}$; в) $a-b$, где $a>0$, $b>0$.

Решение:

а) $\sqrt{18}-\sqrt{3} = \sqrt{6\cdot 3}-\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(\sqrt{6}-1\right)$;

б) выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл при $a \ge 0$, тогда $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$.

Поэтому $a+\sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a} = \sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)$;

в) при $a>0$ и $b>0$ $a-b = \left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

Пример 3. Упростить выражение:

а) $\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+3\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-5\right)$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$.

Решение:

а) $\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+3\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-5\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2-3^2-\left(\sqrt{a}\right)^2+5\sqrt{a} =$

$= a-9-a+5\sqrt{3} = 5\sqrt{a}-9$;

б) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$.

Попытка привести такие дроби к общему знаменателю приведет к громоздкому выражению, поэтому сначала избавимся от иррациональности в знаменателях дробей:

$$\frac{1\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}+\frac{1\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}+\frac{1\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-2}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

1.4.2. Корень третьей степени

Корень третьей степени из числа *a* — это число, третья степень которого равна a.

Корень третьей степени часто называют **кубическим** корнем из числа и обозначают $\sqrt[3]{a}$.

Кубический корень определен из любого действительного числа, причем

$$\boxed{\sqrt[3]{a} = \begin{cases} \sqrt[3]{a}, \text{ если } a \geq 0, \\ -\sqrt[3]{-a}, \text{ если } a < 0 \end{cases}}$$

Например, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

По определению кубического корня $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

Например, $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$; $\left(\sqrt[3]{-5}\right)^3 = -5$.

Арифметическим кубическим корнем из числа *a* называют неотрицательное число, куб которого равен a.

Действие, посредством которого находится кубический корень, называется **извлечением кубического корня.**

Кубический корень обладает теми же свойствами, что и квадратный корень.

Свойства	Примеры
$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$	а) $\sqrt[3]{125 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 3 = 15$; б) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $b \neq 0$	а) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{4}{5}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{625}{5}} = \sqrt[3]{125} = 5$
$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$	а) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7$; б) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

Сравнения, связанные с квадратными и кубическими корнями

Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, $n = 2; 3$	$5 > 3$, поэтому $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{5} > \sqrt[3]{3}$
$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \geq \sqrt[n]{a+b}$, $n = 2; 3$; $a \geq 0$; $b \geq 0$	$\sqrt{5} + \sqrt{3} > \sqrt{8}$; $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{8}$
Если $a > 1$, то $\sqrt{a} > 1$ и $\sqrt{a} < a$ $\sqrt[3]{a} > 1$ и $\sqrt[3]{a} < a$	$5 > 1$, то $\sqrt{5} > 1$ и $\sqrt{5} < 5$; $\sqrt[3]{5} > 1$ и $\sqrt[3]{5} < 5$
Если $0 < a < 1$, то $0 < \sqrt{a} < 1$ и $\sqrt{a} > a$ и $0 < \sqrt[3]{a} < 1$ и $\sqrt[3]{a} > a$	$\dfrac{2}{3} < 1$, то $\sqrt{\dfrac{2}{3}} < 1$ и $\sqrt{\dfrac{2}{3}} > \dfrac{2}{3}$; $0 < \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} < 1$ и $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} > \dfrac{2}{3}$

Преобразование выражений, содержащих кубические корни

1. **Простейшие преобразования.**

а) $3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}=8\sqrt[3]{2}$;

б) $8\sqrt[3]{-3}-2\sqrt[3]{-3}=6\sqrt[3]{-3}=-6\sqrt[3]{3}$;

в) $2\sqrt[3]{5}\cdot 3\sqrt[3]{4}=6\sqrt[3]{20}$;

г) $12\sqrt[3]{24}:6\sqrt[3]{3}=\dfrac{12\sqrt[3]{24}}{6\sqrt[3]{3}}=2\sqrt[3]{8}=2\cdot 2=4$;

д) $\left(3\sqrt[3]{2}\right)^3=3^3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=27\cdot 2=54$.

2. **Вынесение множителя из-под знака корня.**

а) $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{-625}=\sqrt[3]{-125\cdot 5}=-5\sqrt[3]{5}$.

3. **Внесение множителя под знак корня.**

а) $3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{54}$; б) $-2\sqrt[3]{3}=-\sqrt[3]{8\cdot 3}=-\sqrt[3]{24}$.

4. **Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби.**

а) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{5\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{5\sqrt[3]{4}}{2}$;

б) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{3}-1}$; используем формулу $(a-b)(a^2+ab+b)=a^3-b^3$,

т. е. $\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)=3-1=2$.

$$\frac{8}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{8\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}=\frac{8\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{2}=4\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right);$$

в) $$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{(a+b)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{(a+b)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{(a+b)}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}.$$

В данном примере использована формула $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

5. **Упрощение выражений.**

а) $$0,5\cdot\sqrt[3]{96}\cdot\sqrt[3]{1\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}=0,5\cdot\sqrt[3]{\frac{96\cdot 4}{3}}-\frac{\sqrt[3]{5}\left(1-\sqrt[3]{125}\right)}{\sqrt[3]{5}}=$$
$$=0,5\cdot\sqrt[3]{32\cdot 4}-\left(1-\sqrt[3]{125}\right)=0,5\cdot\sqrt[3]{64\cdot 2}-1+5=0,5\cdot 4\sqrt[3]{2}+4=2\sqrt[3]{2}+4;$$

б) $$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{-16}}=\sqrt[3]{-3\cdot 9}\cdot\sqrt{3\cdot 27}-\sqrt[3]{-\frac{2}{16}}=-\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt{81}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=$$
$$=-3\cdot 9+\frac{1}{2}=-27+\frac{1}{2}=-86\frac{1}{2}.$$

1.4.3. Нахождение приближенного значения корня с помощью калькулятора

Чтобы извлечь квадратный корень из числа с помощью калькулятора, нужно ввести это число, а затем нажать кнопку $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Рассмотрим, как можно найти значение выражений, содержащих квадратные корни.

Пример 1. Найти значение выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ при $a = 8{,}1$ и $b = 9{,}4$.

Решение:

Последовательность может быть такой: извлечь квадратный корень из числа a и занести его в память, извлечь квадратный корень из числа b и прибавить его к числу, которое содержится в памяти $(\sqrt{a})$.

После очистки памяти (нажатие кнопки $\boxed{MC}$ или $\boxed{AC}$) схема вычисления будет иметь вид:

$$a\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{M+}\ \boxed{b}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR},$$

где кнопка $\boxed{M+}$ — прибавить к памяти; $\boxed{MR}$ — взять из памяти.

При $a = 8{,}1$ и $b = 9{,}4$ схема вычисления имеет вид:

$$\boxed{8}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{M+}\ \boxed{9}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR}.$$

Выполнив вычисления по схеме и округлив результат до сотых, получим:

$$\sqrt{8{,}1}+\sqrt{9{,}4}\approx 5{,}9.$$

Пример 2. Найти значение выражения $\sqrt{a^2+b^2}$ при $a = 8{,}3$; $b = 7{,}4$.

Решение:

Последовательность выполнения действия может быть такой: возвести в квадрат число a и занести результат в память; возвести в квадрат число b и прибавить его к числу, которое содержится в памяти (a^2); из полученной суммы извлечь корень.

Схема вычисления будет иметь вид:

$$a\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{b}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR}\ \boxed{\sqrt{\ }}.$$

Выполнив вычисления по схеме и округлив результат (при $a = 8{,}3$; $b = 7{,}4$), получим: $\sqrt{8{,}3^2+7{,}4^2}\approx 11{,}1$.

Пример 3. Найти значение выражения $a\sqrt{b}+c$ при $a = 1{,}72$; $b = 3{,}58$ и $c = 5{,}63$.

Решение:

Схема вычислений будет иметь вид:

$$b\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\times}\ a\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ c\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR}.$$

Выполнив вычисления по схеме и округлив результат до сотых, получим:

$$1{,}72\cdot\sqrt{3{,}58}+\sqrt{5{,}63}\approx 5{,}63.$$

1.4.4. Запись корней с помощью степени с дробным показателем

Если a — положительное число ($a > 0$), $a^{\frac{m}{n}}$ — дробное число, где m — целое число, n — натуральное число, то:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}}\quad \boxed{1^{\frac{m}{n}}=1}\quad \boxed{0^{\frac{m}{n}}=0}\quad \boxed{a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}}$$

Например, $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$; $m^{-\frac{3}{7}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{m^3}}$; $p^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{p^1}=\sqrt{p}$; $4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$;

$$25^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{25^2}=\sqrt[3]{(5^2)^2}=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{(5^3)5}=5\sqrt[3]{5};\quad 2^{-\frac{2}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}.$$

Свойства степени с рациональным показателем

Свойства степени с целым показателем справедливы и для степени с любым рациональным показателем.

Если $a > 0$, то для любых рациональных чисел p и q верны равенства:

Правила	Примеры
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2^1 = 2$
$a^p : a^q = \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$32^{\frac{13}{15}} : 32^{\frac{2}{3}} = 32^{\frac{13}{15}-\frac{2}{3}} = 32^{\frac{3}{15}} = 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$\left(16^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{15}{4}} = 16^{\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$
$(ab)^p = a^p \times b^p$	а) $(8a^3b^6)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot a^{3\cdot\frac{1}{3}} \cdot b^{6\cdot\frac{1}{3}} = 2ab^2$; б) $4^{\frac{1}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{5}} = (4 \cdot 8)^{\frac{1}{5}} = (32)^{\frac{1}{5}} = 2^{5\cdot\frac{1}{5}} = 2$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$	а) $\left(\dfrac{b^6}{c^8}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{b^{6\cdot\frac{3}{2}}}{c^{8\cdot\frac{3}{2}}} = \dfrac{b^9}{c^{12}}$; б) $\dfrac{625^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{2}{3}}} = \left(\dfrac{625}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = 125^{\frac{2}{3}} = 5^{3\cdot\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^p$	$(5)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$ $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

Пример 1. Представить в виде степени:

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$;

б) $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{8}} = a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}} = a^{\frac{2+4-3}{8}} = a^{\frac{3}{8}}$;

в) $x^{\frac{1}{5}} : x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{5}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{3-10}{15}} = x^{-\frac{7}{15}} = \dfrac{1}{x^{\frac{7}{15}}}$;

г) $y^{\frac{5}{8}} : y^{-\frac{1}{4}} = y^{\frac{5}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)} = y^{\frac{5}{8}+\frac{1}{4}} = y^{\frac{5+2}{8}} = y^{\frac{7}{8}}$;

д) $\dfrac{m^{-0,2}}{m^{-0,7}} = m^{-0,2-(-0,7)} = m^{-0,2+0,7} = m^{0,5}$;

е) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}} = a^{\frac{3}{2}}$;

ж) $(n^{-1,5})^{\frac{2}{3}} = n^{-1,5\cdot\frac{2}{3}} = n^{-\frac{15\cdot 2}{10\cdot 3}} = n^{-1} = \dfrac{1}{n}$.

Пример 2. Упростить:

а) $(a^4b^8)^{\frac{1}{4}} = (a^4)^{\frac{1}{4}} \cdot (b^8)^{\frac{1}{4}} = a^{4\cdot\frac{1}{4}} \cdot b^{8\cdot\frac{1}{4}} = ab^2$;

б) $\left(a^{-\frac{1}{5}} \cdot y^{-3}\right)^{-5} = a^{-\frac{1}{5}\cdot(-5)} \cdot y^{-3\cdot(-5)} = a^1y^{15} = ay^{15}$;

в) $\left(\dfrac{a^5}{b^{10}}\right)^{\frac{1}{5}} = \dfrac{a^{5\cdot\frac{1}{5}}}{b^{10\cdot\frac{1}{5}}} = \dfrac{a}{b^2}$.

Пример 3. Вычислить:

а) $\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5;$

б) $\dfrac{\sqrt[7]{128}\cdot\sqrt[5]{32}}{\sqrt{81}\cdot\sqrt[3]{64}} = \dfrac{\sqrt[7]{2^7}\cdot\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt{9^2}\cdot\sqrt[3]{4^3}} = \dfrac{2^{\frac{7}{7}}\cdot 2^{\frac{5}{5}}}{9^{\frac{2}{2}}\cdot 4^{\frac{3}{3}}} = \dfrac{2\cdot 2}{9\cdot 4} = \dfrac{1}{9};$

в) $\left(\dfrac{5^{0,6}\cdot 5^{1,4}}{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{4^{0,7}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\dfrac{5^{0,6}\cdot 5^{1,4}}{3^{0,5}\cdot 3^{-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{(2^2)^{0,7}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot (2^6)^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} =$

$= \left(\dfrac{5^{0,6+1,4}}{3^{0,5-2,5}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{2^{2\cdot 0,7}\cdot 2^{-0,4}}{2^{-1}\cdot 2^{6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\dfrac{5^2}{3^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{2^{1,4-0,4}}{2^{-1-2}}\right)^{\frac{3}{4}} = (5^2\cdot 3^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2^{-1(-3)})^{\frac{3}{4}} =$

$= 5^{\frac{2\cdot 1}{2}}\cdot 3^{2\cdot\frac{1}{2}}\cdot 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 5\cdot 3\cdot 2^3 = 120.$

Преобразование выражений, содержащих степени с рациональным показателем

Пример 1. Представить выражение в виде степени с дробным показателем:

а) $x\sqrt{x\sqrt[3]{x}} = x\cdot\left(x\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{6+3+1}{6}} = x^{\frac{10}{6}} = x^{\frac{5}{3}};$

б) $\dfrac{a^2\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^2}}}{\sqrt[15]{a^4}} = \dfrac{a^2\left(a\cdot a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{15}}} = \dfrac{a^2\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{15}}}{a^{\frac{4}{15}}} = \dfrac{a^{\frac{30+5+2}{15}}}{a^{\frac{4}{15}}} = a^{\frac{37}{15}} : a^{\frac{4}{15}} = a^{\frac{33}{15}} = a^{\frac{11}{5}}.$

Пример 2. Сократить дробь:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}+5}{25-a^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{6}}+5}{\left(5-a^{\frac{1}{6}}\right)\left(5+a^{\frac{1}{6}}\right)} = \dfrac{1}{5-a^{\frac{1}{6}}};$

б) $\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{b-a} = -\dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)}{a-b} = -\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2} = -\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)} =$

$= -\dfrac{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}.$

Пример 3. Упростить выражение:

а) $(a^{-0,5}-a^{0,5})^{-1}\cdot(a+a^{-1}-2) = \left(a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\cdot\left(a+\dfrac{1}{a}-2\right) =$

$= \left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{a^2+1-2a}{a}\right) = \left(\dfrac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{a^2-2a+1}{a}\right) = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{1-a}\cdot\dfrac{(1-a)^2}{a} = \dfrac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}};$

б) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=$

$=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=$

$=a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}.$

Возведение в рациональную степень числового неравенства

Если левая и правая части числового неравенства положительны, то его можно возводить в рациональную степень.

Если $r>0$ и $a>b>0$, то $a^r>b^r$.

Если $r<0$ и $a>b>0$, то $a^r<b^r$.

Пример 4. Сравнить числа:

а) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1,5}$ и $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1,5}$; б) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; в) $(4,07)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Решение:

а) $\dfrac{3}{4}<1$, а $\dfrac{4}{3}>1$, поэтому $\dfrac{3}{4}<\dfrac{4}{3}$. Степень $r=1,5>0$, поэтому $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1,5}<\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1,5}$;

б) $6<7$, поэтому $\dfrac{1}{6}>\dfrac{1}{7}$, но степень $r=-\dfrac{1}{2}<0$, поэтому $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}<\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

в) $4\dfrac{3}{25}=4\cdot\dfrac{3\cdot4}{25\cdot4}=4\dfrac{12}{100}=4,12$; $4,12>4,07$ и степень $r=\dfrac{2}{3}>0$, поэтому $(4,12)^{\frac{2}{3}}>(4,07)^{\frac{2}{3}}$.

1.4.5. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби

Рациональное число — это число, которое можно представить в виде дроби вида $\dfrac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное.

Например, $5=\dfrac{5}{1}$; $-2,3=\dfrac{-23}{10}$.

Любое рациональное число можно представить в виде **десятичной дроби,** конечной или бесконечной периодической дроби.

Например, $\dfrac{3}{5}=0,6$; $\dfrac{1}{3}=0,333\ldots$; $\dfrac{13}{11}=1,181818\ldots$

В частном дроби $\dfrac{1}{3}$ повторяется одна и та же цифра 3, а в дроби $\dfrac{13}{11}$ — цифры 1 и 8.

Такие десятичные дроби называют **периодическими**, а повторяющиеся цифры — **периодом**.

$$\frac{1}{3} = 0,(3) \text{ — нуль целых, три в периоде;}$$

$$\frac{13}{11} = 1,(18) \text{ — одна целая, 18 в периоде.}$$

Числа, которые не являются рациональными, т. е. не являются ни целыми, ни представленными в виде дроби вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное, называются **иррациональными числами.**

Примерами иррациональных чисел являются числа $\sqrt{2} \approx 1,41421356...$; $\sqrt{3} = 1,732...$; $\sqrt{10} = 3,162...$

Вообще, если натуральное число n не является полным квадратом, то числа $\sqrt{n}$ и $-\sqrt{n}$ являются иррациональными.

Иррациональным является также число π = 3,14159..., которое выражает отношение длины окружности к диаметру, и число 5,30300300030003... (количество нулей между тройками последовательно увеличивается на 1).

Все иррациональные и рациональные числа образуют **множество действительных чисел.** Его обозначают R.

Каждое натуральное число является целым, поэтому **множество натуральных чисел** — это часть множества целых чисел, т. е. множество N — подмножество целых чисел Z (пишется $Z \subset N$).

Аналогично $Z \subset Q$, $Q \subset R$ (множество целых чисел — подмножество рациональных, множество рациональных — подмножество действительных).

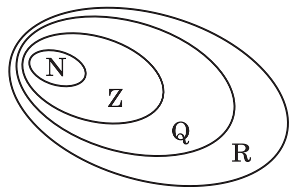


Рис. 1.3

1.4.6. Сравнение действительных чисел

Любые два действительных числа можно сравнить.

Пример 1. Сравнить числа: а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; б) 5 и $\sqrt{24}$; в) $\sqrt[3]{-9}$ и -2.

Решение:

Два иррациональных числа можно сравнить, воспользовавшись правилом возведения в рациональную степень числового неравенства.

Если $r > 0$ и $a > b > 0$, то $a^r > b^r$;
если $r < 0$ и $a > b > 0$, то $a^r < b^r$.

а) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$, $2 < 3$ и $\frac{1}{2} > 0$, то $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{2} < \sqrt{3}$;

б) $5 = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{24} = 24^{\frac{1}{2}}$; $25^{\frac{1}{2}} > 24^{\frac{1}{2}}$, т. е. $5 > \sqrt{24}$;

в) $\sqrt[3]{-9} = -9^{\frac{1}{3}}$; $-2 = ((-2)^3)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}}$, но $-9 < -8$, $\frac{1}{3} > 0$,

тогда $(-9)^{\frac{1}{3}} < (-8)^{\frac{1}{3}}$, т. е. $\sqrt[3]{-9} < -2$.

Сравнить два действительных числа, записанных в виде бесконечных десятичных дробей, можно так же, как и конечные десятичные дроби: 3,1818181... и 3,191735...

Числа имеют одинаковые целые части, одно число десятых, а второе число имеет большее число сотых:

$$3{,}181818... < 3{,}191735...$$

Отрицательные действительные числа сравнивают по правилу сравнения отрицательных рациональных чисел:

$$-7{,}9193... > -7{,}9204...$$

Пример 2. Сравнить числа: а) $\sqrt{2}$ и 1,145; б) $-\sqrt{2}$ и $-1{,}4153$; в) $-\sqrt{3}$ и 1,1.

Решение:

а) С помощью калькулятора находим: $\sqrt{2} \approx 1{,}414213\ldots$

Так как 1,414213... < 1,415, то $\sqrt{2} < 1{,}415$;

б) $\sqrt{2} \approx 1{,}41421\ldots < 1{,}4153$, поэтому $-\sqrt{2} > -1{,}4153$;

в) $-\sqrt{3} < 0$, а 1,1 > 0, поэтому $-\sqrt{3} < 1{,}1$.

1.5. Измерения, приближения, оценки

1.5.1. Единицы измерения длины, площади, объема, массы, времени, скорости

Единицы измерения длины

Основная единица измерения **длины** — 1 м. Длина измеряется в сантиметрах (см), метрах (м), миллиметрах (мм), километрах (км), дециметрах (дм).

1 км = 1000 м	1 м = 0,001 км
1 м = 100 см	1 см = 0,01 м
1 м = 10 дм	1 дм = 0,1 м
1 дм = 10 см	1 см = 0,1 дм
1 см = 10 мм	1 мм = 0,1 см

Пример 1. Представить в сантиметрах: а) 2,5 м; б) 0,7 км; в) 3,3 дм; г) 2,7 мм; д) 0,03 мм.

Решение:

а) 2,5 м = $2{,}5 \cdot 100$ = 250 см;
б) 0,7 км = $0{,}7 \cdot 1000$ = 700 м = $700 \cdot 100$ = 70 000 см;
в) 3,3 дм = $3{,}3 \cdot 10$ = 33 см;
г) 2,7 мм = 2,7 : 10 = 0,27 см;
д) 0,03 мм = 0,03 : 10 = 0,003 см.

Единицы измерения площади

Основная единица измерения **площади** — 1 м^2. Также площадь измеряют в миллиметрах квадратных (мм^2), сантиметрах квадратных (см^2), метрах квадратных (м^2), километрах квадратных (км^2). Земельные участки принято так же измерять гектарами (га) и арами (а).

1 км^2 = 1 000 000 м^2	1 м^2 = 0,000001 км^2	1 га = 10 000 м^2
1 м^2 = 10 000 см^2	1 см^2 = 0,001 м^2	1 а = 100 м^2
1 см^2 = 100 мм^2	1 мм^2 = 0,001 см^2	1 га = 100 а
1 м^2 = 100 дм^2	1 дм^2 = 0,01 м^2	1 га = 0,01 км^2

Пример 2. Представить в сантиметрах квадратных: а) 3,02 м^2; б) 0,03 км^2; в) 5 дм^2; г) 7,2 мм^2; д) 0,4 а.

Решение:

а) 3,02 м^2 = 3,02 · 10 000 = 30 200 см^2;
б) 0,03 км^2 = 0,03 · 1 000 000 = 30 000 м^2 = 30 000 · 10 000 = 300 000 000 см^2;
в) 5 дм^2 = 5 · 100 = 500 см^2;
г) 7,2 мм^2 = 7,2 : 100 = 0,072 см^2;
д) 0,4 а = 0,4 · 100 = 40 м^2 = 40 · 10 000 = 400 000 см^2.

Единицы измерения объема

Основная единица измерения **объема** — метр кубический (м^3). Кроме того, объем измеряют в миллиметрах кубических (мм^3), сантиметрах кубических (см^3), километрах кубических (км^3), для измерения объема жидкостей применяют литр = 1 дм^3, декалитр и гектолитр.

1 м^3 = 1 000 000 см^3	1 декалитр = 10 л
1 дм^3 = 1 л = 1000 см^3	1 гектолитр = 100 л
1 см^3 = 1000 мм^3	
1 км^3 = 1 000 000 000 м^3	

Пример 3. Представить в см^3: а) 0,03 м^3; б) 2 мм^3; в) 5,3 дм^3; г) 0,5 л.

Решение:

а) 0,03 м^3 = 0,03 · 1 000 000 = 30 000 см^3;
б) 2 мм^3 = 2 : 1000 = 0,002 см^3;
в) 5,3 дм^3 = 5,3 · 1000 = 5 300 см^3;
г) 0,5 л = 0,5 дм^3 = 0,5 · 1000 = 500 см^3.

Единицы измерения массы

Основной единицей измерения **массы** является грамм (г), однако масса может измеряться и в килограммах (кг), миллиграммах (мг), центнерах (ц) и тоннах (т).

1 г = 1000 мг	1 мг = 0,001 г	1 т = 10 ц
1 кг = 1000 г	1 г = 0,001 кг	1 ц = 0,1 т
1 ц = 100 кг	1 кг = 0,01 ц	
1 т = 1000 кг	1 кг = 0,001 т	

Пример 4. Представить в граммах: а) 2,7 кг; б) 0,003 кг; в) 29 мг; г) 0,7 ц; д) 3 т 2 ц 1 кг.

Решение:

а) 2,7 кг = 2,7 · 1000 = 2 700 г;
б) 0,003 кг = 0,003 · 1000 = 3 г;
в) 29 мг = 29 : 1000 = 0,029 г;
г) 0,7 ц = 0,7 · 100 = 700 кг = 700 · 1000 = 700 000 г;
д) 3 т 2 ц 1 кг = 3 · 1000 + 2 · 100 + 1 = 3 201 кг = 3 201 · 1000 = 3 201 000 г.

Единицы измерения времени

Основной единицей измерения **времени** является секунда (с). Также единицами измерения времени являются минута, час, сутки; неделя, месяц, год; век, тысячелетие.

1 мин = 60 с 1 ч = 60 мин = 3 600 с 1 сутки = 24 ч = 1440 мин = 86 400 с	$1 \text{ с} = \frac{1}{60} \text{ мин} = \frac{1}{3\,600} \text{ ч}$ $1 \text{ мин} = \frac{1}{60} \text{ ч}$

Пример 5. Выразить в секундах: а) 3 мин 2 с; б) 1 ч 5 мин 7 с. Выразить в минутах: в) 27 с; г) 4 ч 3 мин 8 с. Выразить в часах: д) 48 мин 30 с.

Решение:

а) 3 мин 2 с = $3 \cdot 60 + 2 = 180 + 2 = 182$ с;

б) 1 ч 5 мин 7 с = $1 \cdot 3\,600 + 5 \cdot 60 + 7 = 3\,907$ с;

в) $27 \text{ с} = \frac{27}{60} \text{ мин} = \frac{9}{20} \text{ мин}$;

г) $4 \text{ ч } 3 \text{ мин } 8 \text{ с} = 4 \cdot 60 \text{ мин} + 3 \text{ мин} + \frac{8}{60} \text{ мин} = 243 + \frac{2}{15} = 243\frac{2}{15} \text{ мин}$;

д) $48 \text{ мин } 30 \text{ с} = \frac{48}{60} \text{ ч} + \frac{30}{3\,600} \text{ ч} = \frac{48}{60} + \frac{1}{120} = \frac{96}{120} + \frac{1}{120} = \frac{97}{120} \text{ ч}$.

Единицы измерения скорости

Для измерения **скорости** используют метры в секунду (м/с), километры в час (км/ч), реже километры в секунду (км/с).

Для перевода км/ч в м/с и обратно следует помнить, что 1 км = 1000 м и 1 ч = = 60 с.

Пример 6. Перевести: а) 72 км/ч в метры в секунду; б) 3 м/с в километры в час.

Решение:

а) $72 \text{ км/ч} = \frac{72 \text{ км}}{1 \text{ ч}} = \frac{72 \cdot 1000 \text{ м}}{3\,600 \text{ с}} = 20 \text{ м/с}$;

б) $3 \text{ м/с} = 3 \text{ м} : 1 \text{ с} = \frac{3}{1000} \text{ км} : \frac{1}{3\,600} \text{ ч} = \frac{3 \cdot 3\,600}{1000} \text{ км/ч} = 10,8 \text{ км/ч}$.

1.5.2. Размеры объектов окружающего мира (от элементарных частиц до Вселенной), длительность процессов в окружающем мире

Объекты окружающего мира различны: они бесконечно малы, как элементарные частицы, или бесконечно велики, как планеты. Указывать размеры этих объектов проще всего в виде чисел, записанных в стандартном виде.

Например, известное число Авогадро равно $6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$; количество молекул в 1 г воды равно $3,3 \cdot 10^{22}$; масса одной молекулы воды равна $2,99 \cdot 10^{-23}$ г.

Эти числа записаны в стандартном виде.

Стандартный вид числа — это запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$, n — целое число. Число n — порядок числа.

Например, объем Земли равен $1,083 \cdot 10^{12}$ км^3, ее масса — $5,976 \cdot 10^{24}$ кг.

Пример 1. Представить в стандартном виде числа:
а) 3 900 000 000; б) 0,00000000039.

Решение:

а) Число в стандартном виде имеет вид $a \cdot 10^n$, где a должно быть в пределах от 1 до 10, поэтому запятую, которая условно находится в конце числа, перенесем на 9 знаков влево и, чтобы число осталось неизменным, умножить его на 10^9: $3\,900\,000\,000 = 3{,}9 \cdot 10^9$.

б) Аналогично $0{,}000000000039 = 3{,}9 \cdot 10^{-11}$.

Пример 2. Мировым океаном занято 361 100 000 км² поверхности Земли. Выразить это число в стандартном виде.

Решение:

$$361\,100\,000 \text{ км}^2 = 3{,}611 \cdot 10^8 \text{ км}^2.$$

1.5.3. Представление зависимости между величинами в виде формул

Запись какого-либо правила с помощью букв, цифр и математических знаков называют **формулой**.

Например, запишем правило нахождения пути по скорости и времени движения в буквенном виде.

Пусть s — путь, пройденный телом, скорость обозначим v, время — t. Получим формулу: $s = vt$ — это формула пути.

Примеры формул:

$P = 4a$ — формула вычисления периметра квадрата P, если его сторона равна a;
$S = a^2$ — формула нахождения площади квадрата S, если его сторона равна a;
$C = pm$ — формула вычисления стоимости товара C, если приобретается m килограммов товара по p рублей за килограмм.

Вычисления по формулам

Пример 1. При решении задач на движение в формуле $s = vt$ участвуют три числа, обозначенные буквами. Если известно два из них, то можно найти третье.

$$s = vt;\ v = 75 \text{ км/ч};\ t = 4 \text{ ч};\ s = 75 \text{ км/ч} \cdot 4 \text{ ч} = 300 \text{ км};$$

$$t = \frac{s}{v};\ s = 800 \text{ км};\ v = 80 \text{ км/ч};\ t = \frac{800 \text{ км}}{80 \text{ км/ч}} = 10 \text{ ч};$$

$$v = \frac{s}{t};\ s = 16 \text{ км};\ t = 4 \text{ ч};\ v = \frac{16 \text{ км}}{4 \text{ ч}} = 4 \text{ км/ч}.$$

Пример 2. Из формулы площади треугольника $S = \dfrac{ah}{2}$ выразить высоту h.

Решение:

$$S = \frac{ah}{2} \text{ или } \frac{ah}{2} = S;\ ah = 2S;\ h = \frac{2S}{a}.$$

Пример 3. Из формулы мощности $P = I^2R$ выразить силу тока I. Все величины положительные.

Решение:

$$P = I^2R;\ I^2R = P, \text{ тогда } I^2 = \frac{P}{R} \text{ и } I = \sqrt{\frac{P}{R}}.$$

Пример 4. Из формулы полупериметра треугольника $p = \frac{a+b+c}{2}$ и формулы площади треугольника $S = pr$ выразить сторону треугольника a через величины b, c, r и S.

Решение:

$p = \frac{a+b+c}{2}$ или $\frac{a+b+c}{2} = p$; тогда $a + b + c = 2p$; $a = 2p - b - c$. Но $S = pr$ или $pr = S$, $p = \frac{S}{r}$. Получим: $a = 2p - b - c = \frac{2S}{r} - b - c$.

1.5.4. Проценты. Нахождение процента от величины и величины по ее проценту

Процент — это одна сотая часть числа: $1\,\% = \frac{1}{100}$.

Пример 1. Выразить проценты в виде десятичной дроби или натурального числа: а) 2 %; б) 27 %; в) 0,07 %; г) 120 %; д) 500 %.

Решение:

а) $2\,\% = \frac{2}{100} = 0,02$;

б) $27\,\% = \frac{27}{100} = 0,27$;

в) $0,07\,\% = \frac{0,07}{100} = \frac{7}{10\,000} = 0,0007$;

г) $120\,\% = \frac{120}{100} = 1,2$;

д) $500\,\% = \frac{500}{100} = 5$.

Чтобы записать проценты в виде десятичной дроби или натурального числа, нужно число, которое стоит перед знаком %, поделить на 100.

Пример 2. Выразить число в процентах: а) 0,17; б) 0,09; в) 0,005; г) 3,5; д) 7.

Решение:

а) $0,17 = \frac{17}{100} = 17\,\%$;

б) $0,09 = \frac{9}{100} = 9\,\%$;

в) $0,005 = \frac{5}{1000} = \frac{0,5}{100} = 0,5\,\%$;

г) $3,5 = \frac{35}{10} = \frac{350}{100} = 350\,\%$;

д) $7 = \frac{7}{1} = \frac{700}{100} = 700\,\%$.

Чтобы выразить число в процентах, его нужно умножить на 100 %. Например,

$$0,23 = 0,23 \cdot 100\,\% = 23\,\%;$$
$$0,0077 = 0,0077 \cdot 100\,\% = 0,77\,\%;$$
$$9,7 = 9,7 \cdot 100\,\% = 970\,\%.$$

Связь между простейшими значениями процентов и соответствующими дробями

100 % — целое (1);

50 % — половина $\left(\frac{1}{2}\right)$;

75 % — три четверти $\left(\frac{3}{4}\right)$;

20 % — пятая часть $\left(\frac{1}{5}\right)$;

25 % — четверть $\left(\frac{1}{4}\right)$; 40 % — две пятых части $\left(\frac{2}{5}\right)$.

a — 100 % $2a$ — 200 % $\frac{1}{2}a$ — 50 %

Увеличить что-либо **вдвое** — то же самое, что увеличить на 100 %.
Уменьшить что-либо **вдвое** — то же самое, что уменьшить на 50 %.

Нахождение процента от величины

Пример 3. Сахарная свекла содержит 14 % сахара. Сколько сахара можно получить из 300 кг свеклы?

Решение:

I способ.
1) 300 кг : 100 = 3 (кг) — это 1 %;
2) 3 · 14 = 42 (кг) — это 14 %.

II способ.
1) 14 % = 0,14;
2) 300 · 0,14 = 42 (кг).

Ответ: 42 кг.

Чтобы найти проценты от величины, нужно представить проценты в виде дроби и умножить число на эту дробь.

Нахождение величины по ее проценту

Чтобы найти величину по ее процентам, нужно представить проценты в виде дроби и разделить значение на эту дробь.

Пример 4. Руда содержит 56 % железа. Сколько необходимо переработать руды, чтобы получить 140 т железа?

Решение:

I способ.
1) 140 т : 56 = 2,5 (т) — нашли 1 %;
2) 2,5 · 100 = 250 (т) — это 100 %.

II способ.
1) 56 % = 0,56;
2) 140 : 0,56 = 250 (т).

Ответ: 250 т.

Рассмотрим более сложные задачи на применение этих правил.

Пример 5. Сберегательный банк начисляет на срочный вклад 12 % годовых. Вкладчик положил на счет 9 000 рублей. Сколько рублей будет на этом счете через год, если никаких операций со счетом производиться не будет?

Решение:

Если банк начисляет на срочный вклад 12 % годовых, то в конце года вкладчик получит не 100 % своего вклада, а 100 + 12 = 112 % своего вклада.

Нужно найти 112 % от 9 000 рублей, т. е. это задача на нахождение процентов от величины.

1) 112 % = 1,12;
2) 9 000 · 1,12 = 10 080 (руб.).

Ответ: 10 080 рублей.

Пример 6. Товар на распродаже уценили на 25 %, при этом он стал стоить 900 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

Решение:

Стоимость товара до уценки составляла 100 %, его уценили на 25 %, т. е. теперь он стоит: 100 − 25 = 75 % от первоначальной цены, а это по условию 900 рублей. Значит, это задача на нахождение величины по ее процентам.

1) 75 % = 0,75;

2) 900 : 0,75 = 1200 (руб.).

Ответ: 1200 рублей.

Пример 7. В понедельник товар поступил в продажу по цене 1300 руб. В соответствии с принятыми в магазине правилами, цена товара в течение недели остается неизменной, а в первый день каждой следующей недели снижается на 20 % от предыдущей цены. Сколько будет стоить товар на семнадцатый день после поступления в продажу?

Решение:

В течение первых семи дней цена товара составляла 100 % или 1300 рублей. На восьмой день произвели уценку на 20 %, и это составило: 100 − 20 = 80 % от первоначальной стоимости.

1) 80 % = 0,8;

2) 1300 · 0,8 = 1040 (руб.).

Начиная с восьмого дня и еще неделю цена товара составляла 1040 рублей, и это теперь 100 %. Через неделю снова прошла уценка на 20 %, и товар стал стоить 80 % от 1040 рублей.

3) 1040 · 0,8 = 832 (руб.).

На пятнадцатый день цена товара составляла 832 рубля, еще семь дней цена не менялась, поэтому на семнадцатый день цена товара все еще составит 832 рубля.

Ответ: 832 рубля.

Пример 8. Свежий гриб содержит 90 % воды, а сушеный — 12 %. Сколько сушеных грибов получится из 22 кг свежих?

Решение:

Свежий гриб содержит 90 % воды, значит, чистых грибов в нем: 100 − 90 = 10 %.

1) 10 % = 0,1;

2) 22 · 0,1 = 2,2 (кг) — чистого гриба.

Но сушеные грибы все же содержат воду в количестве 12 %, т. е. чистых грибов в них: 100 − 12 = 88 %, что составляет 2,2 кг. Получим задачу на нахождение величины по ее проценту.

3) 88 % = 0,88;

4) 2,2 : 0,88 = 2,5 (кг).

Ответ: из 22 кг свежих грибов получится 2,5 кг сушеных.

Пример 9. В период распродажи магазин снижал цену дважды: в первый раз на 40 %, во второй — на 10 %. Сколько стоил чайник до распродажи, если после второго снижения цены его цена составляет 648 рублей?

Решение:

Примем начальную цену чайника за 100 %, первый раз цену снизили на 40 %, и его цена составила 60 % от первоначальной. Второй раз цену снизили на 10 %, и его цена составила 90 %, но не от первоначальной цены, а от 60 % первоначальной цены, т. е. (10 % = 0,1) 60 % · 0,9 = 54 % от первоначальной цены. А по условию это 648 рублей.

1) 54 % = 0,54; 2) 648 : 0,54 = 1200 (руб.).

Ответ: 1200 рублей.

1.5.5. Отношение, выражение отношения в процентах

Частное двух чисел называют **отношением.**

Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Пример 1. Турист прошел 9 км, а длина всего маршрута 21 км. Какую часть пути прошел турист?

Решение:

Найдем отношение $9:21=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

Ответ: $\frac{3}{7}$ всего пути.

Отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Это правило называют **основным свойством** отношения.

Пример 2. Заменить отношение дробных чисел отношением натуральных чисел: а) $\frac{1,5}{2,5}$; б) $\frac{2}{3}:\frac{5}{9}$; в) $1\frac{1}{2}:0,75$.

Решение:

а) $\frac{1,5}{2,5}=\frac{1,5\cdot 10}{2,5\cdot 10}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}=3:5$;

б) $\frac{2}{3}:\frac{5}{9}=\left(\frac{2}{3}\cdot 9\right):\left(\frac{5}{9}\cdot 9\right)=6:5$;

в) $1\frac{1}{2}:0,75=\left(\frac{3}{2}\right):(0,75)=\left(\frac{3}{2}\cdot 4\right):(0,75\cdot 4)=6:3=(6:3):(3:3)=2:1$.

Процентное отношение двух чисел — это их отношение, выраженное в процентах.

Процентное отношение показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.

Например, если в классе учится 15 девочек и 20 мальчиков, то процентное отношение количества девочек к количеству мальчиков будет равно: $\frac{15}{20}\cdot 100\ \%=75\ \%$.

Это число показывает, что количество девочек составляет 75 % от количества мальчиков.

Чтобы найти процентное отношение двух чисел, нужно их отношение умножить на 100 и к результату приписать знак процента.

Пример 3. Стоимость товара выросла со 120 рублей до 150 рублей. На сколько процентов увеличилась цена товара?

Решение:

Новая цена составляет $\frac{150}{120}\cdot 100\ \%=125\ \%$, значит, цена выросла на:

$$125\ \%-100\ \%=25\ \%.$$

Ответ: 25 %.

Рассмотрим более сложные примеры на отношения и отношения в процентах.

Пример 4. На пост председателя школьного совета претендовало два кандидата. В голосовании приняло участие 168 человек. Голоса между кандидатами распределились в отношении 3 : 4. Сколько голосов получил победитель?

Решение:

Голоса 168 человек, принявших участие в голосовании, распределились в отношении 3 : 4, т. е. эти голоса разделили на 3 + 4 = 7 частей и большее количество, т. е. 4 части получил победитель:

$$\frac{168}{3+4}\cdot 4=\frac{168}{7}\cdot 4=96.$$

Ответ: 96 голосов.

Пример 5. Тест по математике содержит 36 заданий, их которых 21 задание по алгебре, остальные — по геометрии. В каком отношении содержатся в тесте алгебраические и геометрические задания?

Решение:

В тесте содержится: 36 − 21 = 15 заданий по геометрии. Отношение алгебраических и геометрических задач составляет:

$$\frac{21}{15}=\frac{7}{5}=7:5.$$

Ответ: 7 : 5.

Пример 6. Для приготовления отвара из лекарственных трав взяли цветки шалфея и ромашки в отношении 5 : 6. Какой приблизительно процент в этой смеси составляют цветки шалфея?

Решение:

Общее количество частей в сборе: 5 + 6 = 11, тогда процент шалфея приблизительно составит:

$$\frac{6}{11}\cdot 100\ \%\approx 54{,}54\ \%\approx 55\ \%.$$

Ответ: 55 %.

Пример 7. Ресторан быстрого питания в рекламных целях снизил цену на комплексный обед на 20 %, затем поднял ее на 30 %. На сколько процентов поднялась первоначальная цена комплексного обеда?

Решение:

Примем первоначальную цену комплексного обеда за 100 %, ее снизили на 20 % и она составила 80 %. После того как цену подняли на 30 %, она составила 130 % (130 % = 1,3) от 80 % первоначальной цены, т. е. 80 % · 1,3 = 104 % от первоначальной цены. Таким образом, первоначальная цена возросла на: 104 − 100 = 4 %.

Ответ: на 4 %.

Пример 8. Цена товара выросла на 25 %. На сколько процентов ее нужно снизить, чтобы получить начальную цену?

Решение:

Задачи № 7 и № 8 можно решать с помощью уравнения.

Пусть x — начальная цена товара. После повышения ее на 25 % цена товара составила 125 % = 1,25, т. е. $1{,}25x$. Чтобы получить первоначальную цену товара, нужно повышенную цену снизить на:

$$\frac{1{,}25x-x}{1{,}25x}\cdot 100\ \%=\frac{0{,}25}{1{,}25}\cdot 100\ \%=20\ \%.$$

Ответ: 20 %.

1.5.6. Пропорция. Пропорциональная и обратно пропорциональная зависимость

Равенство двух отношений называют **пропорцией**.

Записывают: $a : b = c : d$ или $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Читают: «Отношение a к b равно отношению c к d».

В пропорции $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ или $a : b = c : d$ числа a и d — **крайние члены**, b и c — **средние члены пропорции**.

средние члены

$$a : b = c : d$$

крайние члены

средние члены

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

крайние члены

В пропорции $36 : 9 = 12 : 3$ числа 36 и 3 — крайние члены, а 9 и 12 — средние члены пропорции.

В верной пропорции произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов.

Верно и обратное утверждение, которое называется **основным свойством пропорции:**

Если произведение крайних членов равно произведению средних членов, то пропорция верна.

Пропорция $36 : 9 = 12 : 3$ верна, поскольку: $36 \cdot 3 = 9 \cdot 12$.

Если в верной пропорции поменять местами средние или крайние члены, то получившиеся пропорции также будут верны.

$6 : 5 = 36 : 30$ — верная пропорция; пропорции $30 : 5 = 36 : 6$ и $6 : 36 = 5 : 30$ тоже верны.

Основные типы задач, которые решаются с помощью пропорций

Пример 1. Решить уравнение: $\dfrac{3}{4} : x = 1\dfrac{1}{5} : 1\dfrac{1}{3}$.

Решение:

Используем основное свойство пропорции и приравняем произведения средних и крайних членов пропорции:

$$1\frac{1}{5} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3};\quad \frac{6}{5}x = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3};\quad \frac{6}{5}x = 1;\quad x = 1 : \frac{6}{5};\quad x = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{6}$.

Пример 2. За 7 ч в бассейн налилось 224 л воды. За какое время в него нальется 288 л воды?

Решение:

Пусть x — время, за которое в бассейн нальется 288 л воды.

Объем воды (л)		Время (ч)
224 л	—	7 ч
288 л	—	x ч

Отношения $\dfrac{224}{7}$ и $\dfrac{288}{x}$ равны, поскольку показывают скорость поступления воды в бассейн.

$$\frac{224}{7} = \frac{288}{x}; \ \ x = \frac{7 \cdot 288}{224} = 9.$$

Ответ: за 9 ч.

Пример 3. (Нахождение процентов от числа.) В саду росло 324 дерева, из которых 25 % составляют яблони. Сколько яблонь в саду?

Решение:

Пусть x — искомое количество яблонь.

Деревья		Проценты
324	—	100 %
x	—	25 %

Отношения $\dfrac{324}{100}$ и $\dfrac{x}{25}$ равны, поскольку каждое составляет 100 %.

$$\frac{324}{100} = \frac{x}{25}; \ \ x = \frac{324 \cdot 25}{100} = 81.$$

Ответ: 81 дерево.

Заметим, что использование пропорций — это еще один способ решения задач на проценты.

Пример 4. (Нахождение числа по его проценту.) За первый час автомобиль проехал 70 км, что составило 14 % всего пути. Сколько километров составляет весь путь?

Решение:

Пусть x — это весь путь, тогда:

Расстояние		Проценты
x	—	100 %
70	—	14 %

$$\frac{x}{100} = \frac{70}{14}; \ \ x = \frac{100 \cdot 70}{14} = 500.$$

Ответ: 500 км.

Пример 5. (Нахождение процентного отношения.) В 85 кг железной руды содержится 51 т железа. Сколько процентов железа содержится в железной руде?

Решение:

Пусть x — процентное содержание железа в руде, тогда:

85 кг — 100 %; 51 кг — x %.

Составим пропорцию: $\dfrac{85}{51} = \dfrac{100}{x}; \ \ x = \dfrac{51 \cdot 100}{85} = 60.$

Ответ: 60 %.

С помощью пропорций легко решаются задачи на нахождение расстояний с помощью масштаба.

Пример 6. Расстояние между двумя городами на карте составляет 17 см. Найти расстояние между этими городами на местности, если масштаб карты — 1 : 300 000.

Решение:

Масштаб 1 : 300 000 означает, что одному сантиметру на карте соответствует 300 000 см на местности.

На карте		На местности
1	—	300 000
17	—	x

Составим пропорцию: $\dfrac{1}{17} = \dfrac{300\ 000}{x}$;

$$x = 30\ 000 \cdot 17 = 5\ 100\ 000 \text{ см}.$$

$$5\ 100\ 000 \text{ см} = 51\ 000 \text{ м} = 51 \text{ км}.$$

Ответ: 51 км.

Прямая и обратная пропорциональная зависимость

Две величины называются **прямо пропорциональными**, если при **увеличении** (уменьшении) одной из них в несколько раз другая **увеличивается** (уменьшается) во столько же раз.

Пример 7. Чтобы выпечь 600 кг хлеба, необходимо 435 кг муки. Сколько необходимо муки, чтобы испечь 1600 кг хлеба того же сорта?

Решение:

Пусть необходимо x кг муки. Запишем условие в виде схемы:

Хлеб		Мука
600 кг	—	435 кг
1600 кг	—	x кг

Масса хлеба и масса муки прямо пропорциональны, т. к. во сколько раз больше возьмем муки, во столько же раз больше получим хлеба.

Составим пропорцию:

$$\frac{600}{1600} = \frac{435}{x}; \quad x = \frac{1600 \cdot 435}{600} = 1160.$$

Ответ: 1160 кг.

Две величины называют **обратно пропорциональными**, если при **увеличении** (уменьшении) одной из них в несколько раз другая **уменьшается** (увеличивается) во столько же раз.

Пример 8. Для перевозки груза необходимо 20 самосвалов грузоподъемностью 3,6 т. Сколько потребуется самосвалов грузоподъемностью 4,5 т, чтобы перевести этот груз?

Решение:

Пусть для перевозки груза потребуется x самосвалов грузоподъемностью 4,5 т. Количество самосвалов и грузоподъемность являются величинами обратно пропорциональными, поскольку при **увеличении** в несколько раз грузоподъемности самосвала количество машин для перевозки одного и того же груза **уменьшится** в то же самое количество раз.

Запишем условие в виде схемы:

Самосвалов		Грузоподъемность
20	—	3,6
x	—	4,5

$$\frac{20}{x} = \frac{4{,}5}{3{,}6}; \quad x = \frac{20 \cdot 3{,}6}{4{,}5} = 16.$$

Ответ: 16 самосвалов.

1.5.7. Округление чисел. Прикидка и оценка результатов вычислений. Выделение множителя-степени десяти в записи числа

Замена числа ближайшим к нему натуральным числом или нулем называется **округлением этого числа до целых.**

Например, если масса рыбы составляет 3,7 кг, то приближенно она равна 4 кг, т. е. мы заменили значение ближайшим натуральным числом.

Аналогично можно дать определение округления до десятых, сотых, десятков, сотен и т. д.

Если число округляют до какого-либо разряда, то все последующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой — отбрасывают.

Например, 3 561 ≈ 3 600 — до сотен; 0,3561 ≈ 0,36 — до сотых (знак «≈» читается «приближенно равно»).

Если первая отброшенная или замененная нулем цифра равна 5, 6, 7, 8 или 9, то стоящую перед ней цифру увеличивают на 1.

Если первая отброшенная или замененная нулем цифра равна 0, 1, 2, 3 или 4, то стоящую перед ней цифру оставляют без изменений.

Пример 1. Округлить до десятых: а) 2,88; б) 37,029; в) 5,999.

Решение:

а) $2{,}8\underline{8} \approx 2{,}9$, поскольку первая отброшенная цифра после десятых — 8;
б) $37{,}0\underline{2}9 \approx 37{,}0$, поскольку первая отброшенная цифра после десятых — 9;
в) $5{,}9\underline{9}9 \approx 6{,}0$, поскольку первая отброшенная цифра после десятых — 9.

Пример 2. Округлить до тысяч число 3 873 501.

Решение:

Заменим нулями числа 5 и 1, а последнюю цифру в числе 3 873 501 увеличим на 1, поскольку первая замененная нулем цифра — 5. Получим 3 873 501 ≈ ≈ 3 874 000.

Пример 3. Округлить:
а) до сотых: 0,07387; 9,7381; 9,0111; 9,999;
б) до целых: 3,728; 56,01; 23,09; 99,91.

Решение:

а) $0{,}07\underline{387} \approx 0{,}07$; $9{,}73\underline{81} \approx 9{,}74$; $9{,}0\underline{1111} \approx 9{,}01$; $9{,}99\underline{99} \approx 10{,}00$;
б) $3{,}\underline{7}28 \approx 4$; $56{,}\underline{0}1 \approx 56$; $23{,}09 \approx 23$; $99{,}\underline{9}1 \approx 100$.

При выполнении вычислений с реальными данными результат часто получается неточный, округленный, поэтому важно выполнить оценку результатов вычислений, т. е. оценить **погрешность вычисления**, т. е. модуль разности между точным и приближенным значением.

Модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением называется абсолютной погрешностью приближения.

То есть если a — приближенное значение величины, а x — точное значение, то абсолютная погрешность равна $|x - a|$.

Пример 4. Дробь $\frac{4}{9}$ заменили приближенным значением 0,44. Какова погрешность данного приближения?

Решение:

$$\left|\frac{4}{9} - 0,44\right| = \left|\frac{4}{9} - \frac{44}{100}\right| = \left|\frac{4}{9} - \frac{11}{25}\right| = \left|\frac{100 - 99}{225}\right| = \frac{1}{225}.$$

Если точное значение измеряемой величины найти невозможно, то можно дать **оценку абсолютной погрешности**, если известны приближение с избытком и с недостатком.

Если a — приближенное значение числа x и $|x - a| \le h$, то говорят, что число x равно числу a с точностью до h:

$$x = a \pm h.$$

Например, запись $x = 3{,}42 \pm 0{,}01$ означает, что x равно 3,42 с точностью до 0,01, т. е.

$$3{,}42 - 0{,}01 \le x \le 3{,}42 + 0{,}01; \; 3{,}41 \le x \le 3{,}43.$$

Числа 3,42 и 3,43 являются приближенными значениями числа **с недостатком** и **с избытком**.

Пример 5. Согласно радиолокационным измерениям, радиус Венеры равен (6 050 ± 5) км. Записать результат в виде двойного неравенства.

Решение:

$$6\,050 - 5 \le x \le 6\,050 + 5; \; 6\,045 \le x \le 6\,055.$$

При сравнении приближений различных величин бывает недостаточно найти только абсолютную погрешность. В таких случаях находят **относительную погрешность.**

Относительной погрешностью называют частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближенного значения величины, умноженное на 100 %.

Пример 6. Приближенное значение массы Земли равно $(5{,}98 \pm 0{,}01) \cdot 10^{24}$ кг. А масса горошины (4 ± 0,2) г. Какое измерение является более точным?

Решение:

Оценим относительную погрешность каждого измерения:

1) масса Земли, относительная погрешность: $\dfrac{0{,}01 \cdot 10^{24}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} \cdot 100\ \% \approx 0{,}2\ \%$;

2) масса горошины, относительная погрешность: $\dfrac{0{,}2}{4} \cdot 100\ \% = 5\ \%$.

Масса Земли измерена точнее.

В некоторых задачах практического содержания нет необходимости находить относительную или абсолютную погрешность, а достаточно просто выполнить прикидку и оценку результатов.

Пример 7. В таблице приведены результаты по бегу на дистанции 30 м для учащихся 9 класса. Оценить результат:

а) девочки, пробежавшей дистанцию за 5,23 с;
б) мальчика, пробежавшего дистанцию за 5,12 с;
в) девочки, пробежавшей дистанцию за 5,98 с.

	Мальчики			**Девочки**		
Оценка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время, с	4,6	4,9	5,3	5,0	5,5	5,9

Решение:

а) Девочка пробежала дистанцию за 5,23 с, что находится в интервале 5,0 < 5,23 < 5,5, т. е. медленнее, чем требуется на оценку «5», но быстрее, чем на оценку «4».

б) Аналогично мальчик, пробежавший дистанцию за 5,12 с, получит оценку «3», поскольку 4,9 < 5,12 < 5,3.

в) Девочка, пробежавшая дистанцию за 5,98 с, норматив не выполнила, поскольку 5,98 > 5,9.

Ответ: а) оценка «4»; б) оценка «3»; в) норматив не выполнен.

Тренировочные тестовые задания к разделу 1

1. Найдите значение выражения: $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 22 \cdot \frac{1}{3}$.

1) 7 2) −19 3) −7 4) $25\frac{2}{3}$

2. Выберите номер того выражения, значение которого равно нулю.

1) $(-1)^5 + (-1)^5$ 2) $(-1)^5 - (-1)^5$ 3) $-1^4 - (-1)^4$ 4) $(-1)^6 + (-1)^4$

3. Соотнесите обыкновенные дроби с равными десятичными.

А) $\frac{3}{5}$

Б) $\frac{9}{8}$

В) $\frac{3}{20}$

1) 0,6
2) 0,12
3) 1,125
4) 0,15

Ответ:

А	Б	В

4. В таблице приведены нормативы по бегу на 30 м для учащихся 9 класса. Оцените результаты мальчика, пробежавшего дистанцию за 4,76 с.

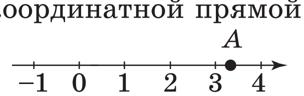
	Мальчики			Девочки		
Оценка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время, с	4,6	4,9	5,3	5,0	5,5	5,9

1) оценка «5» 2) оценка «4» 3) оценка «3» 4) норматив не выполнен

5. Какому из выражений равно произведение $0{,}09 \cdot 0{,}0009 \cdot 0{,}00009$?

1) $729 \cdot 10^{-5}$ 2) $9 \cdot 10^{-5}$ 3) $729 \cdot 10^{-11}$ 4) $9 \cdot 10^{-11}$

6. Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой A?



1) $\sqrt{3}$ 2) $\sqrt{8}$ 3) $\sqrt{11}$ 4) $\sqrt{17}$

7. Значение какого из выражений является рациональным числом?

1) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

3) $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{2}}$

4) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

8. 32 каменщика вымостили улицу за 42 дня. Сколько нужно каменщиков, чтобы вымостить эту улицу за 28 дней?

1) 54 2) 36 3) 24 4) 48

9. Найдите значение выражения: $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}} + \sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$.

1) 12 2) $2\sqrt{11}$ 3) $12 + 2\sqrt{11}$ 4) 22

10. Товар подешевел на 20 %. На сколько процентов больше можно купить товара на ту же сумму денег?

1) 20 % 2) 25 % 3) 10 % 4) 15 %

11. Укажите наибольший общий делитель чисел 45 и 36.

Ответ: ________________________.

12. Упростите, ответ запишите в виде десятичной дроби: $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}}$.

Ответ: ________________________.

13. В магазине было 560 тетрадей, из них $\dfrac{4}{7}$ составляли тетради в клеточку. Сколько было тетрадей в клеточку?

Ответ: ________________________.

14. Средний вес мальчиков того же возраста, что и Саша, равен 54 кг. Вес Саши составляет 135 % от среднего веса. Найдите вес Саши.

Ответ: ________________________.

15. Запишите число в стандартном виде: $725 \cdot 10^{-11}$.

Ответ: ________________________.

16. Из 20 кг морской воды можно добыть 0,5 кг соли. Сколько нужно взять морской воды, чтобы получить 3,5 кг соли?

Ответ: ________________________.

17. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде: $(3{,}4 \cdot 10^{-8}) : (6{,}8 \cdot 10^{-4})$.

Ответ: ________________________.

18. Было 300 г 6 % -ного раствора соли, через некоторое время 60 г воды испарилось. Каким стало процентное содержание соли в растворе?

Ответ: ________________________.

19. Для продажи в цирке заготовили некоторое количество порций мороженого. Сначала продали $\dfrac{4}{7}$ всех порций, потом еще 38 штук. После этого осталась треть всех заготовленных порций. Сколько порций мороженого заготовили для продажи?

Ответ: ________________________.

20. Представьте в виде степени: $\left(\dfrac{a^4 \cdot a^{-3}}{a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}\right) \cdot \left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{9}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{9}{4}}}\right)^2$.

Ответ: ________________________.

2. Алгебраические выражения

Знать:
- определение буквенного выражения, его допустимых значений;
- понятие равенства и тождества;
- формулы сокращенного умножения;
- понятие многочлена, квадратного трехчлена;
- понятие алгебраической дроби и рациональных выражений.

Уметь:
- выполнять элементарные знаково-символьные действия;
- вычислять числовое значение буквенного выражения, находить область допустимых значений переменных;
- выполнять действия с многочленами;
- использовать формулы сокращенного умножения;
- распознавать квадратный трехчлен и раскладывать его на множители;
- выполнять все действия с алгебраическими дробями и рациональными выражениями.

2.1. Буквенные выражения (выражения с переменными)

2.1.1. Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения

Числовое выражение — это математическая запись, содержащая числа, скобки и знаки действий.

Например, $(7 - 4{,}2)^2 \cdot (5{,}5 + 0{,}1)^3$; $\left(\frac{2}{3} - 1\frac{1}{7}\right) \cdot (-0{,}5)$ — числовые выражения.

Число, которое получается в результате выполнения действий, называется **значением числового выражения.**

Буквенным выражением (выражением с переменными или **алгебраическими выражениями)** называют выражение, состоящее из алгебраических величин (чисел и букв), соединенных знаками алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня и возведение в степень) и скобками, показывающими последовательность действий.

Например, $(a^3 - b^3) \cdot (x + y)$; $\frac{a - 3b}{8}$; $x^2 - 3xy + y^2 + 4$ — буквенные выражения.

Если в выражение с переменными подставить вместо букв некоторые числа, то получим числовое выражение, которое будет иметь числовое значение.

Например, при $a = -1$ выражение $a^2 - 2a$ имеет значение $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$.

Пример 1. Записать в виде выражения:
а) сумму чисел b и c;
б) произведение чисел $3k$ и $2n$;
в) квадрат суммы чисел a и m;
г) разность квадратов чисел $3a$ и $4b$;
д) частное чисел $a + c$ и d.

Ответ: а) $b + c$; б) $3k \cdot 2n$; в) $(a + m)^2$; г) $(3a)^2 - (4b)^2$; д) $(a + c) : d$ или $\frac{a + c}{d}$.

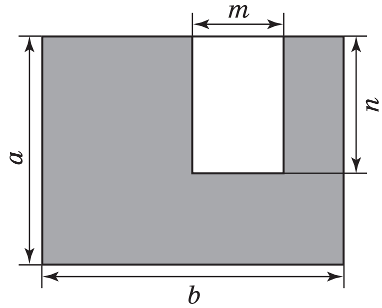
Пример 2. Собственная скорость катера x км/ч, а скорость течения — y км/ч. Сколько километров прошел катер, если он двигался 3 ч по течению, 2,5 ч против течения и 1 ч по озеру?

Решение:

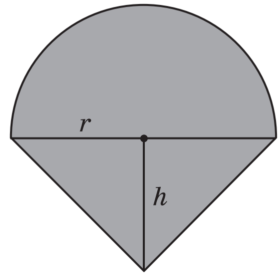
Если собственная скорость катера x км/ч, а скорость течения — y км/ч, то скорость катера по течению составит $(x + y)$ км/ч, против течения — $(x - y)$ км/ч, а по озеру — x км/ч. Тогда пройденный путь составит: $3(x + y) + 2{,}5(x - y) + x$.

Пример 3. Составить выражение для вычисления площади:

а)



б)



Решение:

а) Фигура представляет собой прямоугольник с размерами a на b и площадью $S_1 = ab$, из которой «вырезан» прямоугольник площадью $S_2 = mn$. Тогда площадь искомой фигуры: $S = S_1 - S_2 = ab - mn$.

б) Фигура представляет собой полукруг радиуса r и равнобедренный треугольник с основанием $2r$ и высотой h. Площадь полукруга $S_1 = \frac{1}{2}\pi r^2$, площадь треугольника $S_2 = \frac{1}{2} \cdot (2r) \cdot h = rh$. Тогда площадь искомой фигуры $S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\pi r^2 + rh$.

Ответ: а) $ab - mn$; б) $\frac{1}{2}\pi r^2 + rh$.

2.1.2. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называются **допустимыми значениями переменных**.

Например, для выражения $\frac{3}{x-5}$ допустимыми являются все значения x, кроме $x = 5$, поскольку при $x = 5$ знаменатель $x - 5$ равен нулю, а на нуль делить нельзя, т. е. при $x = 5$ выражение не имеет смысла.

Таким образом, **допустимыми значениями переменных** выражения являются все значения переменных, кроме тех, при которых знаменатель хотя бы одной из дробей, входящих в данное выражение, равен нулю.

Пример 1. Указать допустимые значения переменной в выражении:

а) $a + \frac{a-1}{a+5}$; б) $\frac{3x}{5x^2 + 2x}$; в) $\frac{x^8}{x^4 + 1}$; г) $\frac{1}{x - \frac{1}{x}}$;

д) $\dfrac{a-3}{|a|-5}$; е) $\dfrac{b}{b^2-2|b|}$; ж) $\dfrac{a^2-16}{a^2-6a+8}$; з) $\dfrac{3}{x^2-5xy-6y^2}$.

Решение:

а) Допустимыми являются все значения a, кроме $a = -5$, поскольку при $a = -5$ знаменатель $a + 5$ обращается в нуль.

б) Найдем значения x, при которых знаменатель дроби равен нулю: $5x^2 + 2x = 0$; $x(5x + 2) = 0$; $x = 0$ или $x = -\dfrac{2}{5}$. Допустимыми являются все значения x, кроме $x = 0$ и $x = -\dfrac{2}{5}$.

в) При любом значении x выражение $x^4 + 1 > 0$ и никогда не обращается в нуль. Допустимыми являются все значения x.

г) Найдем значения x, при которых знаменатель $x-\dfrac{1}{x}$ равен нулю: $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}$; $x \neq 0$; $x^2 - 1 = 0$; $(x - 1)(x + 1) = 0$; $x = 1$; $x = -1$. Допустимыми являются все значения x, кроме $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$.

д) Найдем значения a, при которых знаменатель $|a| - 5$ равен нулю: $|a| - 5 = 0$; $|a| = 5$, т. е. $a = 5$ или $a = -5$. Допустимыми являются все значения a, кроме $a = -5$ и $a = 5$.

е) Найдем все значения b, при которых $b^2 - 2|b| = 0$:
при $b \geq 0$: $b^2 - 2b = 0$; $b(b - 2) = 0$; $b = 0$ и $b = 2$;
при $b < 0$: $b^2 + 2b = 0$; $b = 0$ и $b = -2$, но $b = 0$ не удовлетворяет условию $b < 0$, значит, $b = -2$.
Допустимыми являются все значения b, кроме $b = -2$, $b = 0$ и $b = 2$.

ж) Найдем значения a, при которых знаменатель $a^2 - 6a + 8$ равен нулю: $a^2 - 4a - 2a + 8 = 0$; $a(a - 4) - 2(a - 4) = 0$; $(a - 4)(a - 2) = 0$; $a = 4$ и $a = 2$. Допустимыми являются все значения a, кроме $a = 4$ и $a = 2$.

з) Найдем зависимость между переменными x и y, при которой знаменатель $x^2 + 5xy - 6y^2$ равен нулю: $x^2 + 5xy - 6y^2 = x^2 - xy + 6xy - 6y^2 = x(x - y) + 6y(x - y) = (x - y)(x + 6y)$, т. е. $x = y$ или $x = -6y$. Допустимыми являются все значения x и y, кроме случаев, когда $x = y$ и $x = -6y$.

2.1.3. Подстановка выражений вместо переменных

Выражения с переменными при различных значениях этих переменных могут принимать разные значения.

Пример 1. Найти значение выражения $a^2 + 3b$, если: а) $a = -1$, $b = -3$; б) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{4}$.

Решение:

а) Если $a = -1$, $b = -3$, то $a^2 + 3b = (-1)^2 + 3 \cdot (-3) = 1 - 9 = -8$;

б) Если $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{4}$, то $a^2+3b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

Пример 2. Упростить выражение и найти его числовое значение:
$\dfrac{9a^2-24ab+16b^2-25}{3a-4b-5}$ при $a=\dfrac{1}{9}$, $b=2\dfrac{1}{3}$.

Решение:

$$\frac{(9a^2-24ab+16b^2)-25}{3a-4b-5}=\frac{(3a-4b)^2-5^2}{3a-4b-5}=\frac{(3a-4b-5)(3a-4b+5)}{3a-4b-5}=3a-4b+5.$$

Если $a=\frac{1}{9}$, $b=2\frac{1}{3}$, то $3a-4b+5=3\cdot\frac{1}{9}-4\cdot 2\frac{1}{3}+5=\frac{3}{9}-\frac{4\cdot 7}{3}+5=$

$=\frac{1}{3}-\frac{28}{3}+5=-\frac{27}{3}+5=-9+5=-4.$

Пример 3. Известно, что $\frac{4b+a}{5a-7b}=3.$

Найти: а) $\frac{4a-5b}{2a+b}$; б) $\frac{3a^2-2ab+2b^2}{5a^2+3b^2}$; в) $\frac{a^3-3ab^2}{4a^2b+3b^3}$.

Решение:

Преобразуем выражение $\frac{4b+a}{5a-7b}=2.$ Разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части равенства, почленно на $b\neq 0$, получим: $\dfrac{\frac{4b}{b}+\frac{a}{b}}{\frac{5a}{b}-\frac{7b}{b}}=2;$

$\dfrac{4+\frac{a}{b}}{5\cdot\frac{a}{b}-7}=2.$ Найдем значение $\frac{a}{b}$ из этого равенства: $4+\frac{a}{b}=2\left(5\cdot\frac{a}{b}-7\right);$

$4+\frac{a}{b}=10\cdot\frac{a}{b}-14;$ $-9\cdot\frac{a}{b}=-18;$ $\frac{a}{b}=2.$

а) Применим этот прием, т. е. почленное деление дроби на $b\neq 0$ к данному выражению, затем подставим $\frac{a}{b}=2$: $\dfrac{4a-5b}{2a+b}=\dfrac{\frac{4a}{b}-\frac{5b}{b}}{\frac{2a}{b}+\frac{b}{b}}=\dfrac{\frac{4a}{b}-5}{\frac{2a}{b}+1}=\dfrac{4\cdot 2-5}{2\cdot 2+1}=\dfrac{3}{5}.$

б) Заметим, что в числителе и знаменателе данной дроби стоит сумма одночленов второй степени, поэтому разделим эти одночлены на b^2 почленно, учитывая, что $\frac{a}{b}=2$:

$$\frac{3a^2-2ab+2b^2}{5a^2+3b^2}=\frac{3\cdot\frac{a^2}{b^2}-2\cdot\frac{ab}{b}+2\cdot\frac{b^2}{b^2}}{5\cdot\frac{a^2}{b^2}+3\cdot\frac{b^2}{b^2}}=\frac{3\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\left(\frac{a}{b}\right)^2+2}{5\left(\frac{a}{b}\right)^2+3}=\frac{3\cdot 2^2-2\cdot 2+2}{5\cdot 2^2+3}=\frac{10}{23}.$$

в) В числителе и знаменателе данной дроби стоят одночлены третьей степени, поэтому разделим их почленно на b^3, учитывая, что $\frac{a}{b}=2$:

$$\frac{a^3-3ab^2}{4a^2b+3b^3}=\frac{\frac{a^3}{b^3}-\frac{3ab^2}{b^3}}{\frac{4a^2b}{b^3}+\frac{3b^3}{b^3}}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}\right)}{4\left(\frac{a}{b}\right)^2+3}=\frac{2^3-3\cdot 2}{4\cdot 2^2+3}=\frac{2}{19}.$$

2.1.4. Равенство буквенных выражений, тождество. Преобразования выражений

Два выражения, принимающие соответственные значения при любых значениях переменных, называются **тождественно равными**, или **тождественными**.

Например, выражения $5x + 3x$ и $8x$ являются тождественно равными.

Тождество — равенство, верное при любых допустимых значениях переменных.

Например, $3(a - b) = 3a - 3b$; $\dfrac{a}{b} + \dfrac{5}{b} = \dfrac{a+5}{b}$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Равенства, выражающие законы арифметических действий, также являются тождествами:

$$a + b = b + a;\ ab = bc;$$
$$(a + b) + c = a + (b + c);\ (ab)c = a(bc);$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Замена данного выражения другим тождественным ему выражением называется **тождественным преобразованием выражений.**

Тождественные преобразования выражений выполняют на основании свойств действий над числами, к тождественным преобразованиям относят и раскрытие скобок, и приведение подобных слагаемых. Тождественные преобразования используют для упрощения выражений.

Пример 1. Упростить выражение: $-2(3m - 5) + 3(3m + 7)$.

Решение:

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$-2(3m - 5) + 3(3m + 7) = -6m + 10 + 9m + 21 =$$
$$= (-6m + 9m) + (10 + 21) = 3m + 31.$$

Чтобы доказать, что **равенство является тождеством** (иначе говоря, чтобы **доказать тождество**), используют **тождественные преобразования выражений.**

Доказать тождество можно так:

1) левую часть тождества с помощью тождественных преобразований сводим к виду, который имеет правая часть;
2) правую часть тождества с помощью тождественных преобразований сводим к виду, который имеет левая часть;
3) обе части тождества преобразуем к одному и тому же виду;
4) находим разность левой и правой частей тождества и показываем, что она равна нулю.

Пример 2. Доказать тождество: $10x - (-(5x + 20)) = 5(3x + 4)$.

Доказательство:

Рассмотрим левую часть тождества, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые, вынесем за скобки общий множитель:

$$10x - (-(5x + 20)) = 10x - (-5x - 20) =$$
$$= 10x + 5x + 20 = 15x + 20 = 5(3x + 4),$$

что и требовалось доказать.

2.2. Степень с целым показателем

2.2.1. Свойства степени с целым показателем

Применим свойства степени с целым показателем для упрощения выражений, содержащих одночлены.

Выражения, состоящие из произведения чисел, букв и их степеней, называют **одночленами**.

Например, 3; $-3y^4$; $0{,}7 \cdot x \cdot y \cdot 3 \cdot z^5$.

Стандартным видом одночлена называют одночлен, состоящий из произведения числового множителя, стоящего на первом месте (его называют *коэффициентом*), и степени с различными буквенными основаниями.

Степенью одночлена называют число, равное сумме показателей степеней всех входящих в него букв.

Например, степень одночлена $0{,}5xyz^3$ равна $1 + 1 + 3 = 5$.

Если одночлен является числом, то его степень равна нулю, например, $3 = 3a^0$, степень одночлена — нуль.

Сложение и вычитание одночленов

Сложение и вычитание многочленов можно производить только с одночленами, имеющими одинаковую буквенную часть, т. е. с подобными.

Пример 1. $2xy - 5a + 3xy + 0{,}7a - 3 = 5xy - 4{,}3a - 3$.

Умножение одночленов

Используем свойства степени с целым показателем ($a^n \cdot a^m = a^{m+n}$), а также переместительный и сочетательный законы умножения.

Пример 2.

а) $(-3a^3b^7) \cdot (0{,}2ab^4) = -3 \cdot 0{,}2 \cdot a^{3+1} \cdot b^{7+4} = -0{,}6a^4b^{11}$;

б) $\left(1\frac{1}{2}xy^3a\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}x^5yb\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{1+5} \cdot y^{3+1} \cdot a \cdot b = -abx^6y^4$.

Деление одночленов

Используем свойство степени:

$$a^n : b^m = a^{n-m}.$$

Пример 3.

а) $28a^8b^4 : 0{,}7a^4b = 28 : 0{,}7 \cdot a^{8-4} \cdot b^{4-1} = 40a^4b^3$;

б) $\dfrac{-0{,}3ab^4x}{2a^3by} = -0{,}3 : 2a^{1-3} \cdot b^{4-1} \cdot x \cdot y^{-1} = -0{,}15a^{-2}b^3xy^{-1} = -\dfrac{3b^3x}{20a^2y}$.

Возведение одночлена в степень

Используем свойства степени:

$$(ab)^n = a^nb^n \text{ и } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0.$$

Пример 4.

а) $\left(-\frac{1}{2}p^7a\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (p^7)^3 \cdot a^3 = -\frac{1}{8}p^{21}a^3$;

б) $(10m^2n)^2 \cdot (-3mn^2)^3 = 10^2 \cdot (m^2)^2 \cdot n^2 \cdot (-3)^3 \cdot m^3 \cdot (n^2)^3 = 100m^4 \cdot n^2 \cdot (-27) \cdot m^3 \times$ $\times\, n^6 = -2700m^7n^8$;

в) $(a^2b^5)^n \cdot (a^{2n}b)^3 \cdot (a^3b^{2n})^5 = (a^2)^n \cdot (b^5)^n \cdot (a^{2n})^3 \cdot b^3 \cdot (a^3)^5 \cdot (b^{2n})^5 = a^{2n} \cdot b^{5n} \cdot a^{6n} \cdot b^3 \cdot a^{15} \times$ $\times\, b^{10n} = a^{2n+6n+15} \cdot b^{5n+3+10n} = a^{8n+15}b^{15n+3}$;

г) $\left(\frac{2^{n+2} \cdot 7^{n+1}}{14^n}\right)^2 = \left(\frac{2^{n+2} \cdot 7^{n+1}}{(2 \cdot 7)^n}\right)^2 = \left(\frac{2^{n+2} \cdot 7^{n+1}}{2^n \cdot 7^n}\right)^2 = (2^{n+2-n} \cdot 7^{n+1-n})^2 = (2^2 \cdot 7)^2 = 2^4 \cdot 7^2 = 16 \times$ $\times\, 49 = 784$.

2.3. Многочлены

2.3.1. Многочлен. Сложение, вычитание, умножение многочленов

Многочлен — это сумма одночленов.

Многочлен, состоящий из двух слагаемых, называется **двучленом**, из трех — **трехчленом** и т. д.

Слагаемые многочлена, имеющие одинаковую буквенную часть, называют **подобными**.

Так, слагаемые $3xy^2$ и $-3xy^2$ подобны; $3abc$ и abc подобны; 3, 7 и -5 подобны.

Стандартный вид многочлена — это многочлен, состоящий из одночленов стандартного вида и не содержащий подобных слагаемых.

Степень многочлена стандартного вида — наибольшая из степеней, входящих в него одночленов.

Например, многочлен $x^3y^2 + xy^2 + xy + 3$ — это многочлен пятой степени, поскольку степень одночлена x^3y^2 пятая и наибольшая из всех.

Пример 1. Свести многочлен к стандартному виду, указать его степень:

$3a^2b^3 - abb^2 - a^3a - a^2b^2b + 0{,}5ab \cdot 2b^2 + 4ab \cdot 0{,}5ab^2 = \underline{3a^2b^3} - \underline{\underline{ab^3}} - a^4 - \underline{a^2b^3} +$ $+\, \underline{\underline{ab^3}} + \underline{2a^2b^3} = 4a^2b^3 - a^4$. Это многочлен пятой степени.

Сложение и вычитание многочленов

Чтобы записать **сумму** нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые. Если перед скобкой стоит знак «+», то при раскрытии скобок знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, нужно оставить без изменения.

Пример 2. Найти сумму многочленов: $5m^3 - m + 3$, $3m^2 + m$ и $-5m^3 - 2m^2 + 4$.

Решение:

$$(5m^3 - m + 3) + (3m^2 + m) + (-5m^3 - 2m^2 + 4) =$$
$$= \underline{5m^3} - \underline{\underline{m}} + 3 + \underline{3m^2} + \underline{\underline{m}} - \underline{5m^3} - \underline{2m^2} + 4 = m^2 + 7.$$

Чтобы записать **разность** нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые. Если перед скобкой стоит знак «−», то при раскрытии скобок знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, нужно заменить на противоположные.

Пример 3. Найти разность многочленов:
а) $3a^4 + 3a^3 - 9$ и $3a^4 - 3a^3 + 9$; б) $5p^2 - 2pq - 7q^2$ и $-3p^2 + 2pq + 5q^2$.

Решение:

а) $(3a^4 + 3a^3 - 9) - (3a^4 - 3a^2 + 9) = 3a^4 + 3a^3 - 9 - 3a^4 + 3a^3 - 9 = 6a^3 - 18$;
б) $(5p^2 - 2pq - 7q^2) - (-3p^2 + 2pq + 5q^2) = 5p^2 - 2pq - 7q^2 + 3p^2 - 2pq - 5q^2 = -4pq - 12q^2$.

Умножение одночлена на многочлен

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно этот одночлен умножить на каждый член многочлена и полученные произведения сложить:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + dc.$$

Пример 4. Представить в виде многочлена:

а) $-\frac{1}{14}a^2b^5 \cdot \left(1,5a - \frac{4}{7}b\right) = -\frac{1}{14} \cdot \frac{15}{10}a^3b^5 + \frac{1}{14} \cdot \frac{4}{7}a^2b^6 = -\frac{3}{28}a^3b^5 + \frac{2}{49}a^2b^2$;

б) $3xy(x^2 - y^2 + 7) - 5xy(y^2 + x^2) = \underline{3x^3y} - \underline{\underline{3xy^3}} + 21xy - \underline{\underline{5xy^3}} - \underline{5x^3y} = -2x^3y - 8xy^3 + 21xy$;

в) $\left(-\frac{1}{2}a^2b^9 + \frac{1}{6}ab^7 - \frac{1}{3}a^3b^6\right) \cdot (-12a^3b^7) = 6a^5b^{16} - 2a^4b^{14} + 4a^6b^{13}$.

Умножение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные результаты сложить.

Пример 5. Представить в виде многочлена:
а) $(4p - 2m)(3p + 5m) = 12p^2 + 2mp - 6mp - 10m^2 = 12p^2 - 4pm - 10m^2$;
б) $(-x^2 + 3ax - a)(x + 2a) = -x^3 - 2ax + 3ax^2 + 6a^2x - ax - 2a^2 = -x^3 - 3ax + 3ax^2 - 6a^2x - 2a^2$;
в) $-2b^3(2b + b^2)(b - 1) = -2b^3(2b^2 - 2b + b^3 - b^2) = -2b^3(b^2 + b^3 - 2b) = -2b^5 - 2b^6 + 4b^4$.

Пример 6. Упростить выражение и найти его значение: $8a^3 - (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$ при $b = \frac{1}{3}$.

Решение:

$$8a^3 - (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2) =$$
$$= 8a^3 - 8a^3 - \underline{12a^2b} - \underline{\underline{18ab^2}} + \underline{12a^2b} + \underline{\underline{18ab^2}} - 27b^3 = -27b^3.$$

Если $b = \frac{1}{3}$, то $-27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = -27 \cdot \frac{1}{27} = -1$.

2.3.2. Формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности; формула разности квадратов суммы и разности кубов

Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения	Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения

плюс удвоенное произведение первого и второго выражения плюс квадрат второго выражения	минус удвоенное произведение первого и второго выражения плюс квадрат второго выражения

Пример 1.
а) $(-a - b)^2 = (-a)^2 + 2 \cdot (-a) \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;
б) $(-a + b)^2 = (-a)^2 + 2 \cdot (-a) \cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Пример 2. Представить в виде многочлена:
а) $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$;
б) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot 3 + (3y)^2 = \frac{1}{9}x^2 + 2x + 9y^2$;
в) $\left(6m^3 + 1\frac{1}{6}m^5\right)^2 = 36m^6 + 2 \cdot 6m^3 \cdot \frac{7}{6}m^5 + \frac{49}{36}m^{10} = 36m^6 + 14m^8 + 1\frac{13}{36}m^{10}$;
г) $(7a^2 - 8ap^3)^2 = 49a^4 - 2 \cdot 7a^2 \cdot 8ap^3 + 64a^2p^6 = 49a^4 - 112a^3p^3 + 64a^2p^6$.

Формула разности квадратов

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

Пример 3.
а) $(2a + 7)(2a - 7) = (2a)^2 - 7^2 = 4a^2 - 49$;
б) $\left(\frac{2}{7}a - \frac{3}{5}b\right)\left(\frac{2}{7}a + \frac{3}{5}b\right) = \left(\frac{2}{7}a\right)^2 - \left(\frac{3}{5}b\right)^2 = \frac{4}{49}a^2 - \frac{9}{25}b^2$;
в) $\left(5m^2n + \frac{1}{7}p^3\right)\left(\frac{1}{7}p^3 - 5m^2n\right) = \left(\frac{1}{7}p^3\right)^2 - (5m^2n)^2 = \frac{1}{49}p^6 - 25m^4n^2$;
г) $(-a^2 + 7)(7 + a^2) = (7 - a^2)(7 + a^2) = 49 - a^4$;
д) $(-2a^3 - 3b)(-3b + 2a^3) = -(2a^3 + 3b)(2a^3 - 3b) = -(4a^6 - 9b^2) = 9b^2 - 4a^6$;
е) $(x + y + 1)(x + y - 1) = ((x + y) + 1)((x + y) - 1) = (x + y)^2 - 1^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 1$.

Сумма и разность кубов

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Произведение суммы двух выражений и неполного квадрата их разности равно сумме кубов этих выражений.

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Произведение разности двух выражений и неполного квадрата их суммы равно разности кубов этих выражений.

Пример 4. Представить в виде многочлена:
а) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$;
б) $(4p - 1)(16p^2 + 4p + 1) = (4p)^3 - 1^3 = 64p^3 - 1$;
в) $(b^3 + d^2)(b^6 - b^3d^2 + d^4) = (b^3)^3 + (d^2)^3 = b^9 - d^6$;
г) $(5m^2 + 6p^3)(25m^4 - 30m^2p^3 + 36p^6) = (5m^2)^3 - (6p^3)^3 = 25m^6 - 216p^9$;
д) $(a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1) = ((a - 1)(a^2 + a + 1))((a + 1)(a^2 - a + 1)) =$
$= (a^3 - 1)(a^3 + 1) = (a^3)^2 - 1^2 = a^6 - 1$.

2.3.3. Разложение многочлена на множители

Разложить многочлен на множители означает представить его как произведение нескольких одночленов и многочленов, тождественно равное данному многочлену.

Разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения

Формула	Примеры
Квадрат суммы двух выражений: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	а) $a^2 + 10a + 25 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2 = (a+5)^2$; б) $0{,}01x^2 + 0{,}8x + 16 = (0{,}1x)^2 + 2 \cdot 0{,}1x \cdot 4 + 4^2 =$ $= (0{,}1x + 4)^2$; в) $\frac{1}{4}x^2 + 2xy + 4y^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot 2y + (2y)^2 =$ $= \left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^2$; г) $\frac{1}{9}a^4 + 9b^2 + 2a^2b = \left(\frac{1}{3}a^2\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot 3b + (3b)^2 =$ $= \left(\frac{1}{3}a^2 + 3b\right)^2$
Квадрат разности двух выражений: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	а) $a^2 - 2ax + x^2 = (a-x)^2$; б) $b^2 - 0{,}12b + 0{,}36 = b^2 - 2 \cdot b \cdot 0{,}6 + 0{,}6^2 =$ $= (b - 0{,}6)^2$; в) $\frac{1}{49}m^2 - \frac{2}{7}m + 1 = \left(\frac{1}{7}m\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{7}m \cdot 1 + 1^2 =$ $= \left(\frac{1}{7}m - 1\right)^2$; г) $-6{,}4a^2y^4 + 0{,}16a^4 + 64y^8 = 0{,}16a^4 - 6{,}4a^2y^4 + 64y^8 =$ $= (0{,}4a^2)^2 - 2 \cdot 0{,}4a^2 \cdot 8y^4 + (8y^4)^2 = (0{,}4a^2 - 8y^4)^2$
Разность квадратов двух выражений: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	а) $36a^2 - b^2 = (6a)^2 - b^2 = (6a-b)(6a+b)$; б) $-100m^2 - 121v^2 = 121v^2 - 100m^2 = (11v)^2 -$ $-(10m)^2 = (11v - 10m)(11v + 10m)$; в) $-1\frac{11}{25}p^{16}q^{18} + 1\frac{7}{9}t^{20}a^{24} = \frac{16}{9}t^{20}a^{24} - \frac{36}{25}p^{16}q^{18} =$ $= \left(\frac{4}{3}t^{10}a^{12} - \frac{6}{5}p^8q^9\right)\left(\frac{4}{3}t^{10}a^{12} + \frac{6}{5}p^8q^9\right) =$ $= \left(1\frac{1}{3}t^{10}a^{12} - 1\frac{1}{5}p^8q^9\right)\left(1\frac{1}{3}t^{10}a^{12} + 1\frac{1}{5}p^8q^9\right)$; г) $(a+2)^2 - 1 = (a+2-1)(a+2+1) =$ $= (a+1)(a+3)$; д) $625 - (a-3)^2 = 25^2 - (a-3)^2 =$ $= (25 - (a-3))(25 + (a-3)) =$ $= (25 - a + 3)(25 + a - 3) = (28 - a)(22 + a)$;

Окончание таблицы

Формула	Примеры
	е) $(5a^2 - 3b)^2 - (2a^2 + 5b)^2 = ((5a^2 - 3b) - (2a^2 + 5b))((5a^2 - 3b) + (2a^2 + 5b)) = (5a^2 - 3b - 2a^2 - 5b)(5a^2 - 3b + 2a^2 + 5b) = (3a^2 - 8b)(7a^2 + 2b)$
Сумма и разность кубов двух выражений: $a^3 + b^3 =$ $= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 =$ $= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	а) $1000 + b^3 = 10^3 + b^3 = (10 + b)(100 - 10b + b^2)$; б) $n^3 - 64 = n^3 - 4^3 = (n - 4)(n^2 + 4n + 16)$; в) $\frac{27}{8}a^3 + \frac{8}{27}b^3 = \left(\frac{3}{2}a\right)^3 + \left(\frac{2}{3}b\right)^3 = \left(\frac{3}{2}a + \frac{2}{3}b\right) \times$ $\times \left(\frac{9}{4}a^2 + ab + \frac{4}{9}b^2\right)$; г) $343a^{18}b^{33} - 0{,}001c^{36} = (7a^6b^{11})^3 - (0{,}1c^{12})^3 = (7a^6b^{11} - 0{,}1c^{12})(49a^{12}b^{22} + 0{,}7a^6b^{11}c^{12} + 0{,}01c^{24})$; д) $(a + 3)^3 - a^3 = (a + 3 - a)((a + 3)^2 + a(a + 3) + a^2)) = 3(a^2 + 6a + 9 + a^2 + 3a + a^2) = 3(3a^2 + 9a + 9) = 9(a^2 + 3a + 3)$
Куб суммы и разности двух выражений: $(a + b)^2 =$ $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a - b)^2 =$ $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	а) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$; б) $27x^3 - 9x^2y + xy^2 + \frac{1}{27}y^3 = (3x)^3 - 3 \cdot 9x^2 \cdot \frac{1}{3}y +$ $+ 3 \cdot 3x \cdot \frac{1}{9}y + \left(\frac{1}{3}y\right)^3 = \left(3x - \frac{1}{3}y\right)^3$

Разложение на множители способом вынесения общего множителя за скобки

Чтобы разложить многочлен на множители способом вынесения общего множителя за скобки, нужно: 1) найти этот множитель; 2) вынести его за скобки, разделив каждый член многочлена на этот общий множитель.

Пример 1. Разложить на множители многочлен $35a^3b^2 - 14a^2b^4$.

Решение:

Если коэффициенты членов многочлена — натуральные числа, то общий множитель — это наибольший общий делитель этих чисел. (Для чисел 35 и 14 наибольший общий делитель — 7). Из степеней с одинаковым основанием в общий множитель войдет каждая степень с наименьшим показателем (a^2 и b^2 — степени с наименьшим показателем). Общий множитель — $7a^2b^2$. Вынесем его за скобки, числа в скобках получаем делением данного многочлена на их общий множитель, т. е. на $7a^2b^2$:

$$35a^3b^2 - 14a^2b^4 = 7a^2b^2\left(\frac{35a^3b^2}{7a^2b^2} - \frac{14a^2b^4}{7a^2b^2}\right) = 7a^2b^2(5a - 2b^2).$$

Пример 2. Вынести за скобки общий множитель:

а) $7ax - 7bx = 7x(a - b)$;
б) $15xy + 5x = 5x(3y + 1)$;
в) $-5a^4b^2 - 10a^2b^4 + 15a^3b^3 = -5a^2b^2(a^2 + 2b^2 - 3ab)$;
г) $p^7 + p^3 - p^5 = p^3(p^4 + 1 - p^2)$;
д) $-3m^8 - m^2 - 5m^4 = -m^2(3m^6 + 1 + 5m^2)$;

е) $2p(x - y) + q(x - y) = (x - y)(2p + q)$;
ж) $a(b - 5) - n(5 - b) = a(b - 5) + n(b - 5) = (b - 5)(a + n)$.

Разложение многочленов на множители способом группировки

Чтобы разложить многочлен на множители способом группировки, нужно: 1) объединить слагаемые в такие группы, которые имеют общий множитель в виде многочлена; 2) вынести этот общий множитель за скобки.

Как правило, один и тот же многочлен можно разложить на множители двумя способами, группируя различные слагаемые:

I способ	II способ
$\underline{ab + 5a} + \underline{bm + 5m} =$ $= a(\underline{b + 5}) + m(\underline{b + 5}) = (b + 5)(a + m)$	$ab + 5a + bm + 5m = \underline{ab + bm} + \underline{5a + 5m}$ $= b(a + m) + 5(a + m) = (a + m)(b + 5)$

Пример 3. Разложить многочлен на множители способом группировки:
а) $\underline{b^2 + xb} - \underline{x^2y - xby} = b(b + x) - xy(x + b) = (x + b)(b - xy)$;
б) $\underline{4a - ax} - \underline{x^2 + 4x} = a(4 - x) - x(x - 4) = a(4 - x) + x(4 - x) = (4 - x)(a + x)$;
в) $mp - b + bp - m = (mp - m) - (b - bp) = m(p - 1) - b(1 - p) = m(p - 1) + b(p - 1) = (m + b)(p - 1)$;
г) $21x + 8tm^3 - 24m^2 - 7xtm = (21x - 7xtm) + (8tm^3 - 24m^2) = 7x(3 - tm) + 8m^2(tm - 3) = 7x(3 - tm) - 8m^2(3 - tm) = (3 - tm)(7x - 8m^2)$.

Пример 4. Разложить на множители многочлен $at^2 - ap + t^3 - tp - bt^2 + bp$.

Решение:

I способ. Сгруппируем члены многочлена в три группы по два слагаемых так, чтобы слагаемые в каждой группе имели общий множитель:

$$(at^2 - ap) + (t^3 - tp) - (bt^2 - bp) =$$
$$= a(t^2 - p) + t(t^2 - p) - b(t^2 - p) = (t^2 - p)(a + t - b).$$

II способ. Сгруппируем члены многочлена в две группы по три слагаемых:

$$\underline{at^2} - \underline{ap} + \underline{t^3} - \underline{tp} - \underline{bt^2} + \underline{bp} = (at^2 + t^3 - bt^2) - (ap + tp - bp) =$$
$$= t^2(a + t - b) - p(a + t - b) = (a + t - b)(t^2 - p).$$

Пример 5. Разложить на множители трехчлен, представив один из его членов в виде суммы подобных слагаемых:
а) $x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5 = x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x - 5)$;
б) $x^2 - x - 6 = x^2 - 2x + 3x - 6 = x(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x + 3)$;
в) $a^2 + 5ab + 6b^2 = a^2 + 2ab + 3ab + 6b^2 = a(a + 2b) + 3b(a + 2b) = (a + 2b)(a + 3b)$.

Разложение многочлена на множители несколькими способами

Чтобы разложить многочлен на множители, можно использовать последовательно несколько способов: 1) вынесение за скобки общего множителя; 2) формулы сокращенного умножения; 3) способ группировки.

Пример 6. Разложить многочлены на множители:
а) $16x^2 - 4$; б) $3a^5 - 300a^7$; в) $2am^2 + 4am + 2a$; г) $-pm^3 - pn^6$.

Решение:

Применим способ вынесения за скобки общего множителя и формулы сокращенного умножения:
а) $16x^2 - 4 = 4(4x^2 - 1) = 4(2x - 1)(2x + 1)$;
б) $3a^5 - 300a^7 = 3a^5(1 - 100a^2) = 3a^5(1 - 10a)(1 + 10a)$;
в) $2am^2 + 4am + 2a = 2a(m^2 + 2m + 1) = 2a(m + 1)^2$;
г) $-pm^3 - pn^6 = -p(m^3 + n^6) = -p(m + n^2)(m^2 - mn^2 + n^4)$.

Пример 7. Разложить многочлены на множители:
а) $7ab + 21a - 7b - 21$; б) $-abc - 3ac - 4ab - 12a$.

Решение:

Применим способ вынесения за скобки общего множителя и способ группировки:
а) $7ab + 21a - 7b - 21 = 7(ab + 3a - b - 3) = 7(a(b + 3) - 1(b + 3)) = 7(b + 3)(a - 1)$;
б) $-abc - 3ac - 4ab - 12a = -a(bc + 3c + 4b + 12) = -a((c(b + 3) + 4(b + 3)) = -a(b + 3)(c + 4)$.

Пример 8. Разложить многочлены на множители:
а) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$;
б) $p^2 - x^2 + 20x - 100$;
в) $a^3 - b^3 + a^2 - 2ab + b^2$;
г) $c^2 + 2cd + d^2 - x^2 - 2xy - y^2$.

Решение:

Применим способ группировки и формулы сокращенного умножения последовательно:
а) $x^2 + 2xy + y^2 - 25 = (x^2 + 2xy + y^2) - 5^2 = (x + y)^2 - 5^2 = (x + y - 5)(x + y + 5)$;
б) $p^2 - x^2 + 20x - 100 = p^2 - (x^2 - 20x + 100) = p^2 - (x - 10)^2 = (p - (x - 10))(p + (x + 10)) = (p - x + 10)(p + x + 10)$;
в) $a^3 - b^3 + a^2 - 2ab + b^2 = (a^3 - b^3) + (a^2 - 2ab + b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a - b)$;
г) $c^2 + 2cd + d^2 - x^2 - 2xy - y^2 = (c + d)^2 - (x^2 + 2xy + y^2) = (c + d)^2 - (x + y)^2 = ((c + d) - (x + y))(c + d) + (x + y)) = (c + d - x - y)(c + d + x + y)$.

2.3.4. Квадратный трехчлен. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Квадратным уравнением называют уравнение вида
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Если $a = 1$, то такое уравнение называют **приведенным.**

Например, $x^2 - 7x + 1 = 0$ — приведенное квадратное уравнение.

Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 + x_2 = -p$, а $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

По теореме Виета можно устно находить корни приведенных квадратных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение: а) $x^2 - 13x + 40 = 0$; б) $x^2 + 5x - 14 = 0$.

Решение:

а) Пусть x_1 и x_2 — корни этого уравнения. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 40$, т. е. корни одного знака. $x_1 + x_2 = 13$, т. е. оба корня положительные. Очевидно, что $x_1 = 5$, $x_2 = 8$.

б) По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -14$, значит, корни разных знаков. $x_1 + x_2 = -5$, т. е. модуль отрицательного корня больше модуля положительного корня на 5. $x_1 = -7$, $x_2 = 2$.

Ответ: а) 5; 8; б) −7; 2.

Пример 2. Число −9 является корнем уравнения $x^2 + 10x + q = 0$. Найти второй корень уравнения и коэффициент q.

Решение:

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -10$, но $x_1 = -9$, тогда $x_2 = -1$, поэтому $q = x_1 \cdot x_2 = -1 \cdot (-9) = 9$.

Ответ: −1; 9.

Пример 3. Уравнения $x^2 + px + 8 = 0$ имеет положительные корни, один из которых в 4 раза больше другого. Найти корни уравнения и коэффициент p.

Решение:

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 8$, а по условию $x_1 = 4x_2$, тогда $4x_2 \cdot x_2 = 8$; $x_2^2 = 2$, по условию корни положительные, тогда $x_2 = \sqrt{2}$, $x_1 = 4\sqrt{2}$. $-p = x_1 + x_2 = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$; $p = -5\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$; $p = -5\sqrt{2}$.

Пример 4. Не решая уравнения $x^2 - 7x + 9 = 0$, найти:

а) $x_1 \cdot x_2$; б) $x_1 + x_2$; в) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$; г) $x_1^2 + x_2^2$; д) $x_1^3 + x_2^3$.

Решение:

а) По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 9$;

а) По теореме Виета $x_1 + x_2 = 7$;

в) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{7}{9}$;

г) $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7^2 - 2 \cdot 9 = 49 - 18 = 31$;

д) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = 7 \cdot (31 - 9) = 7 \cdot 22 = 154$.

Многочлен вида $ax^2 + bc + c$, где $a \neq 0$, называется **квадратным трехчленом**.

Теорема

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то квадратный трехчлен можно представить в виде:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Примечание: если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не раскладывается на линейные множители.

Пример 5. Разложить на множители квадратный трехчлен $2x^2 + 3x - 5$.

Решение:

Решим квадратное уравнение $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 7}{4}.$$

$$x_1 = \frac{-3 - 7}{4} = -2,5; \quad x_2 = \frac{-3 + 7}{4} = 1.$$

Тогда $2x^2 + 3x - 5 = 2(x - (-2,5))(x - 1) = 2(x + 2,5)(x - 1) = (2x + 5)(x - 1)$.

Пример 6. Сократить дробь: $\dfrac{6x^2 - 5x + 1}{4x^2 - 1}$.

Решение:

Решим уравнение $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}. \quad x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Представим исходную дробь в виде:

$$\frac{6x^2 - 5x + 1}{4x^2 - 1} = \frac{6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{(2x-1)(3x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{3x-1}{2x+1}.$$

2.3.5. Степень и корень многочлена с одной переменной

Биномы (двучлены) с одной переменной вида $(x + a)$, где x — переменная, a — число, можно возводить в степень:

$$(x + a)^1 = x + a;$$
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2;$$
$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3;$$
$$(x + a)^n = A_0x^n + A_1x^{n-1}a + A_2x^{n-2}a^2 + A_3x^{n-3}a^3 + \ldots + A_{n-1}xa^{n-1} + A_na^n.$$

То есть если раскрыть скобки в выражении $(x + a)^n$, то получим многочлен с одной переменной степени n:

$$A_0 = A_n = 1.$$

Остальные коэффициенты разложения можно получить с помощью треугольника Паскаля. В этом треугольнике в каждом ряду по краям стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, находящихся над ними слева и справа.

Треугольник Паскаля

Степень	Коэффициенты разложения																
$(x + a)^0$									1								
$(x + a)^1$								1		1							
$(x + a)^2$							1		2		1						
$(x + a)^3$						1		3		3		1					
$(x + a)^4$					1		4		6		4		1				
$(x + a)^5$				1		5		10		10		5		1			
$(x + a)^6$			1		6		15		20		15		6		1		
$(x + a)^7$		1		7		21		35		35		21		7		1	
$(x + a)^8$	1		8		28		46		70		46		28		8		1

Пример 1. Используя треугольник Паскаля, разложить:
а) $(x + 1)^5$; б) $(x - 2)^4$; в) $(x + 1)^7$; г) $(x^2 - 1)^6$.

Решение:

а) $(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$;

б) $(x - 2)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot (-2) + 6x^2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot x \cdot (-2)^3 + (-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x - 16$;

в) $(x + 1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$;

г) $(x^2 - 1)^6 = (x^2)^6 + 6 \cdot (x^2)^5 \cdot (-1) + 15 \cdot (x^2)^4 \cdot (-1)^2 + 20 \cdot (x^2)^3 \cdot (-1)^3 + 15 \cdot (x^2)^2 \times$ $\times (-1)^4 + 6 \cdot (x^2) \cdot (-1)^5 + (-1)^6 = x^{12} - 6x^{10} + 15x^8 - 20x^6 + 15x^4 - 6x^2 - 1$.

Запишем многочлен от одной переменной в виде:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где n — степень многочлена, a_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) — коэффициенты, a_n — старший коэффициент, $a_n \neq 0$.

Корнем многочлена называется такое число x_0, при котором значение многочлена равно нулю: $f(x_0) = 0$.

Целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями его свободного члена.

Пример 2. Найти корни многочлена $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$.

Решение:

Целые корни можно искать среди чисел: -1; 1; -2; 2; -4; 4 и -8; 8.

$$f(1) = 1 + 5 + 2 - 8 = 0,\ x_1 = 1;$$
$$f(-1) = -1 + 5 - 2 - 8 \neq 0;$$
$$f(2) = 8 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 8 \neq 0;$$
$$f(-2) = -8 + 20 - 4 - 8 = 0,\ x = -2;$$
$$f(4) = 64 + 5 \cdot 16 + 8 - 8 \neq 0;$$
$$f(-4) = -64 + 80 - 8 - 8 = 0,\ x_3 = -4.$$

Ответ: -4; -2; 1.

2.4. Алгебраическая дробь

2.4.1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей

Алгебраическая дробь — это дробь, у которой числитель и знаменатель являются многочленами.

Например, $\dfrac{3}{x-2}$; $\dfrac{a+7}{a-7}$; $\dfrac{x^2+y}{x^2-xy+2y^2}$; $\dfrac{a}{x}$; $\dfrac{3}{b}$.

Значение переменных, при которых дробь имеет смысл, называют **допустимыми значениями переменных.**

Например, для дроби $\dfrac{3}{x-2}$ допустимыми являются все значения переменной x, кроме $x = 2$.

Допустимыми значениями переменных алгебраической дроби являются все значения переменных, кроме тех, при которых знаменатель дроби равен нулю.

Например, для дробей: $\dfrac{x}{x^2-4}$ $x \neq 2$ и $x \neq -2$; $\dfrac{5}{|y|-4}$ $y \neq 4$ и $y \neq -4$; $\dfrac{a}{a^2-3a+2}$ $a \neq 1$ и $a \neq 2$; $\dfrac{a+1}{a(a-1)(a+5)}$ $a \neq 0$, $a \neq 1$ и $a \neq -5$.

Основное свойство алгебраической дроби

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить или разделить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится дробь, равная ей.

Это свойство позволяет сокращать дроби и приводить их к общему знаменателю.

Сократить алгебраическую дробь означает разделить числитель и знаменатель на общий множитель, не равный нулю.

Пример 1. Сократить дроби:

а) $\dfrac{28x^2y^2}{35x^2y^3} = \dfrac{4\cdot 7\cdot x^2\cdot y^2}{5\cdot 7\cdot x^2\cdot y^2\cdot y} = \dfrac{4}{5y}$;

б) $\dfrac{-15mn^2}{40m^2n^2} = \dfrac{-5\cdot 3\cdot m\cdot n^2}{5\cdot 8\cdot m\cdot m\cdot n^2} = -\dfrac{3}{8m}$;

в) $\dfrac{6a-3b}{8a-4b} = \dfrac{3(2a-b)}{4(2a-b)} = \dfrac{3}{4}$;

г) $\dfrac{4y-8}{y^2-4y+4} = \dfrac{4(y-2)}{(y-2)^2} = \dfrac{4}{y-2}$;

д) $\dfrac{4c^2-25x^2}{4c^2+20cx+25x^2} = \dfrac{(2c-5x)(2c+5x)}{(2c+5x)^2} = \dfrac{2c-5x}{2c+5x}$;

е) $\dfrac{8a+4b}{2ab+b^2-2ad-bd} = \dfrac{4(2a+b)}{b(2a+b)-2d(2a+b)} = \dfrac{4(2a+b)}{(2a+b)(b-2d)} = \dfrac{4}{b-2d}$;

ж) $\dfrac{x^3+8}{x+2} = \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = x^2-2x+4$;

з) $\dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^2-xy-2y^2} = \dfrac{x^2+xy+2xy+2y^2}{x^2+xy-2xy-2y^2} = \dfrac{x(x+y)+2y(x+y)}{x(x+y)-2y(x+y)} =$

$= \dfrac{(x+y)(x+2y)}{(x+y)(x-2y)} = \dfrac{x+2y}{x-2y}$.

Пример 2. Построить график функции: $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

Решение:

Рассмотрим выражение $\dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$ при условии, что $x+1 \neq$ $\neq 0$, т. е. $x \neq -1$.

Нужно построить график функции: $y = \begin{cases} x-1; \\ x \neq -1. \end{cases}$

Графиком данной функции является прямая $y = x - 1$ с «выколотой» точкой $(-1; -2)$.

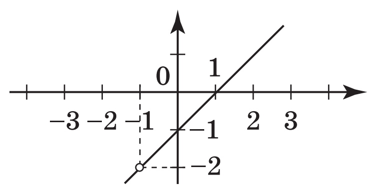


Рис. 2.1

2.4.2. Действия с алгебраическими дробями

Сложение и вычитание алгебраических дробей

Чтобы сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить (вычесть) их числители, а знаменатели оставить прежними.

Пример 1. Выполнить действия:

а) $\dfrac{b-3}{4b} + \dfrac{3b-1}{4b} = \dfrac{b-3+3b-1}{4b} = \dfrac{4b-4}{4b} = \dfrac{4(b-1)}{4b} = \dfrac{b-1}{b}$;

б) $\dfrac{a-3b}{a+b}-\dfrac{3a-b}{a+b}=\dfrac{a-3b-(3a-b)}{a+b}=\dfrac{a-3b-3a+b}{a+b}=\dfrac{-2a-2b}{a+b}=$

$=\dfrac{-2(a+b)}{a+b}=-2;$

в) $\dfrac{7c-9}{c-3}-\dfrac{c-15}{3-c}=\dfrac{7c-9}{c-3}+\dfrac{c-15}{c-3}=\dfrac{7c-9+c-15}{c-3}=\dfrac{8c-24}{c-3}=\dfrac{8(c-3)}{c-3}=8.$

Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, нужно сначала привести дроби к одному знаменателю, а затем складывать (вычитать) дроби с одинаковыми знаменателями.

Пример 2. Выполнить действия:

а) $\dfrac{5b}{ac}+\dfrac{4c}{b};$

б) $\dfrac{4}{9x^2y^2}+\dfrac{7}{12xy^3};$

в) $\dfrac{2}{xy-y^2}-\dfrac{2}{x^2-xy};$

г) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x+3}{4-x^2}+\dfrac{3x+1}{x^2-4x-4}.$

Решение:

а) Общим знаменателем двух дробей будет произведение их знаменателей, поэтому дополнительный множитель для первой дроби — b, а для второй — ac:

$$\frac{5b^{/b}}{ac}+\frac{4c^{/ac}}{b}=\frac{5b^2+4ac^2}{abc}.$$

б) Общий знаменатель дробей — произведение наименьшего общего кратного чисел 9 и 12, т. е. 36, и степеней переменных с наибольшим показателем, с которыми они входят в знаменатели, т. е. общим знаменателем будет $36x^2y^3$. Дополнительный множитель для первой дроби — $4y$, для второй — $3x$:

$$\frac{4^{/4y}}{9x^2y^2}+\frac{7^{/3x}}{12xy^3}=\frac{16y+21x}{36x^2y^3}.$$

в) Разложим знаменатель каждой дроби на множители:

$$\frac{2}{xy-y^2}-\frac{2}{x^2-xy}=\frac{2^{/x}}{y(x-y)}-\frac{2^{/y}}{x(x-y)}=\frac{2x-2y}{xy(x-y)}=\frac{2(x-y)}{xy(x-y)}=\frac{2}{xy}.$$

г) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x+3}{4-x^2}+\dfrac{3x+1}{x^2-4x-4}=\dfrac{2^{/(x-2)^2}}{x+2}+\dfrac{x+3^{/x-2}}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{3x+1^{/x+2}}{(x-2)^2}=$

$=\dfrac{2(x^2-4x+4)+(x-2)(x+3)+(x+2)3x+1)}{(x+2)(x-2)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-8x+8+x^2+3x-2x-6+3x^2+x+6x+2}{(x+2)(x-2)^2}=\dfrac{6x^2+4}{(x+2)(x-2)^2}.$

Чтобы сложить (вычесть) дробь и целое число, нужно целое выражение представить в виде дроби со знаменателем 1, а затем использовать правило сложения (вычитания) дробей с разными знаменателями.

Пример 3. Преобразовать в дробь выражение: $x + y - \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$.

Решение:

$$x + y - \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{x + y^{/x+y}}{1} - \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{x + y} =$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2}{x + y} = \frac{2xy}{x + y}.$$

Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение дроби в степени

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить отдельно их числители и знаменатели, первое произведение записать в числитель, второе — в знаменатель.

С помощью этого правила получаем и правило возведения дроби в n-ю степень:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Пример 4. Выполнить умножение и возведение в степень:

а) $\dfrac{25a^2}{4b^3} \cdot \dfrac{10b^2}{15a^5} = \dfrac{25a^2 \cdot 10b^2}{4b^3 \cdot 15a^5} = \dfrac{25}{6a^3b}$;

б) $12m^2 \cdot \left(-\dfrac{3}{16mn^3}\right)^2 = -\dfrac{12m^2 \cdot 3}{16mn^3} = -\dfrac{9m}{n^3}$;

в) $\left(-\dfrac{2a^3b}{3m^2}\right)^4 = \dfrac{16a^{12}b^4}{81m^8}$;

г) $\left(-\dfrac{3a^3b}{5c^2}\right)^3 = -\dfrac{27a^9b^3}{125c^6}$;

д) $\dfrac{3a-1}{a^2-1} \cdot \dfrac{a+1}{9a^2-1} = \dfrac{(3a-1)(a+1)}{(a-1)(a+1)(3a-1)(3a+1)} = \dfrac{1}{(a-1)(3a+1)}$;

е) $\dfrac{a^2-1}{x^3-1} \cdot \dfrac{x^2+x+1}{a^2+2a+1} = \dfrac{(a-1)(a+1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(a+1)^2} = \dfrac{a-1}{(x-1)(a+1)}$;

ж) $\dfrac{x^2+xy+xz+yz}{x^2-xy+xz-yz} \cdot \dfrac{x^2-xy-2x+2y}{x^2+xy-2x-2y} = \dfrac{x(x+y)+z(x+y)}{x(x-y)+z(x-y)} \times$

$\times \dfrac{x(x-y)-2(x-y)}{x(x+y)-2(x+y)} = \dfrac{(x+y)(x+z)\cdot(x-y)(x-2)}{(x-y)(x+z)\cdot(x+y)(x-2)} = 1$;

з) $16^n \cdot \left(\dfrac{16^{n+1}+4\cdot 16^n}{64^{n+1}-4\cdot 64^n}\right) = 16^n \cdot \left(\dfrac{16^n \cdot (16+4)}{64^n \cdot (64-4)}\right)^2 = (2^4)^n \cdot \left(\dfrac{(2^4)^n \cdot 20}{(2^6)^n \cdot 60}\right) =$

$= \dfrac{2^{4n}\cdot(2^{4n})^2}{(2^{6n}\cdot 3)^2} = \dfrac{2^{4n}\cdot 2^{8n}}{2^{12n}\cdot 9} = \dfrac{1}{9}.$

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0.$$

Пример 5. Выполнить деление:

а) $\dfrac{18a^3}{-5b^4} : \dfrac{6a^4}{15b} = -\dfrac{18a^3 \cdot 15b}{5b^4 \cdot 6a^4} = -\dfrac{9}{ab^3}$;

б) $-14xy^2 : \left(-\dfrac{28x^2y^3}{5z}\right) = \dfrac{14xy^2 \cdot 5z}{28x^2y^3} = \dfrac{5z}{2xy}$;

в) $\dfrac{5mn^2}{7k^3} : (-10k^2n^2) = -\dfrac{5mn^2}{7k^3 \cdot 10k^2n^2} = -\dfrac{m}{14k^5}$;

г) $\left(\dfrac{3a}{a-b}\right)^2 : \dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2} = \dfrac{9a^2 \cdot (a-b)(a+b)}{(a-b)^2 \cdot a(a+b)} = \dfrac{9a}{a-b}$.

2.4.3. Рациональные выражения и их преобразования

Рациональным выражением называется выражение, составленное из чисел, букв, их степеней, скобок и арифметических знаков.

Например, $2x^2$; 7; $\dfrac{5x+1}{x-1}$; $\dfrac{2a+b}{a} - \dfrac{b^2}{4a}$.

Рациональное выражение называется **целым**, если оно не содержит деления на выражение с переменной.

Например, выражения $3x - 1$; -3; $5xy - 1$; $\dfrac{x+3}{4}$; $\dfrac{1}{8}xy$ — целые.

Рациональная (алгебраическая) дробь — это дробь, у которой числитель и знаменатель являются многочленами.

Тождественные преобразования рациональных выражений

Пример 1. Упростить выражение: $\dfrac{a}{3-a} + \dfrac{a^2+3a}{2a+3} \cdot \left(\dfrac{a+3}{a^2-3a} - \dfrac{a}{a^2-9}\right)$.

Решение:

1. Выполним сначала действие в скобках. Для этого разложим знаменатели на множители и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a+3}{a^2-3a} - \frac{a}{a^2-9} = \frac{a+3^{/a+3}}{a(a-3)} - \frac{a^{/a}}{(a-3)(a+3)} = \frac{(a+3)^2 - a^2}{a(a-3)(a+3)} =$$

$$= \frac{a^2+6a+9-a^2}{a(a-3)(a+3)} = \frac{6a+9}{a(a-3)(a+3)} = \frac{3(2a+3)}{a(a-3)(a+3)}.$$

2. Выполним умножение:

$$\frac{a^2+3a}{2a+3} \cdot \frac{3(2a+3)}{a(a-3)(a+3)} = \frac{a(a+3) \cdot 3(2a+3)}{(2a+3) \cdot a(a-3)(a+3)} = \frac{3}{a-3}.$$

3. Выполним сложение:

$$\frac{a}{3-a} + \frac{3}{a-3} = \frac{a}{3-a} - \frac{3}{3-a} = \frac{a-3}{3-a} = -\frac{a-3}{a-3} = -1.$$

Пример 2. Доказать тождество:

$$\left(\frac{a}{a+n} - \frac{a}{a^2+n^2+2an}\right) : \left(\frac{a}{a-n} - \frac{a}{a^2-n^2}\right) = \frac{a-n}{a+n}.$$

Доказательство:

Упростим выражение, стоящее в левой части:

$$\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a-n}-\frac{a}{a^2-n^2}\right)=\left(\frac{a^{/a+n}}{a+n}-\frac{a}{(a+n)^2}\right):$$

$$:\left(\frac{a^{/a+n}}{a-n}-\frac{a}{(a-n)(a+n)}\right)=\frac{a^2+an-a}{(a+n)^2}:\frac{a^2+an-a}{(a-n)(a+n)}=$$

$$=\frac{(a^2+an-a)\cdot(a-n)(a+n)}{(a+n)^2\cdot(a^2+an-a)}=\frac{a-n}{a+n}.$$

Получили выражение, стоящее в правой части равенства. Тождество доказано.

2.5. Квадратный корень из числа

2.5.1. Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях

Простейшие свойства квадратных корней рассмотрены в п. 1.4.1.

Напомним, что **квадратным корнем** из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Например, квадратными корнями из числа 36 будут числа 6 и -6, поскольку $6^2 = 36$ и $(-6)^2 = 36$.

Поэтому уравнение вида $x^2 = a$ при $a \geq 0$ имеет два корня: $x_1=\sqrt{a}$ и $x_2=-\sqrt{a}$.

Например, уравнение $x^2 = 3$ имеет корни: $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$.

Неотрицательное значение $\sqrt{a}$ называют **арифметическим квадратным корнем**.

Основные свойства арифметического квадратного корня

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ a\geq 0,\ b\geq 0;$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a\geq 0,\ b\geq 0;$$
$$\sqrt{a^{2n}}=a^n,\ a\geq 0$$

Для любых значений a выполняется тождество:

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Например, $\sqrt{5,1^2}=|5,1|=5,1;$ $\sqrt{(-8)^2}=|-8|=8.$

Пример 1. Найти значение выражения $\sqrt{a^2+2a+1}$ при $a = 5$; $a = -1$; $a = -2$.

Решение:

$$\sqrt{a^2+2a+1}=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|.$$

а) Если $a = 5$, то $|a + 1| = |5 + 1| = |6| = 6$;

б) если $a = -1$, то $|a + 1| = |-1 + 1| = |0| = 0$;
в) если $a = -2$, то $|a + 1| = |-2 + 1| = |-1| = 1$.
Ответ: 6; 0; 1.

Знак квадратного корня называют **радикалом**, а выражение вида $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ называют **двойным радикалом.**

Преобразование двойных радикалов вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$

Метод выделения полного квадрата

В преобразованиях таких выражений стремятся освободиться от внешнего радикала, представить подкоренное выражение в виде квадрата суммы или разности двух выражений.

Пример 2. Упростить выражение, представив подкоренное выражение в виде полного квадрата:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot 1 + 1^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} =$

$= \left|\sqrt{3}+1\right| = \sqrt{3}+1$;

б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4-4\sqrt{5}+5} = \sqrt{2^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} =$

$= \left|2-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-2$ (число $2-\sqrt{5} < 0$, поэтому $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = -\left(2-\sqrt{5}\right)$);

в) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}} = \sqrt{17-4\sqrt{4+2\cdot 2\sqrt{5}+5}} = \sqrt{17-4\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}} =$

$= \sqrt{17-4\left|2+\sqrt{5}\right|} = \sqrt{17-4\left(2+\sqrt{5}\right)} = \sqrt{17-8-4\sqrt{5}} = \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2$ (см. пример *б*).

Формула двойного радикала

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$ и разность $a^2 - b$ равна квадрату рационального числа, можно использовать формулу:

$$\boxed{\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

Пример 3. Упростить выражение: $\sqrt{55+\sqrt{216}}$.

Решение:

Поскольку $\sqrt{55^2-216} = \sqrt{2\,809} = 53$, можно использовать формулу двойного радикала:

$$\sqrt{55+\sqrt{216}} = \sqrt{\frac{55+\sqrt{55^2-216}}{2}} + \sqrt{\frac{55-\sqrt{55^2-216}}{2}} = \sqrt{\frac{55-53}{2}} +$$

$$+\sqrt{\frac{55+53}{2}} = \sqrt{1} + \sqrt{108} = 1 + \sqrt{36\cdot 3} = 1 + 6\sqrt{3}.$$

Упрощение двойных радикалов с переменной

Так же, как и в методе выделения полного квадрата, необходимо выделить полный квадрат в подкоренном выражении.

Пример 4. Найти значение выражения $\sqrt{\dfrac{a-2\sqrt{a-2}-1}{\sqrt{a-2}-1}}+1$, если $a = 2{,}2$.

Решение:

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении, стоящем в числителе:

$$\frac{\sqrt{a-2\sqrt{a-2}-1}}{\sqrt{a-2}-1}+1=\frac{\sqrt{(a-2)-2\cdot 1\sqrt{a-2}+1}}{\sqrt{a-2}-1}+1=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a-2}-1\right)^2}}{\sqrt{a-2}-1}+1=\frac{\left|\sqrt{a-2}-1\right|}{\sqrt{a-2}-1}+1.$$

Если $a = 2{,}2$, то выражение $\sqrt{a-2}-1<0$, поэтому:

$$\frac{\left|\sqrt{a-2}-1\right|}{\sqrt{a-2}-1}+1=\frac{-\left(\sqrt{a-2}-1\right)}{\sqrt{a-2}-1}+1=-1+1=0.$$

Выражение переменных из геометрических и физических формул

Понятие арифметического квадратного корня иногда приходится использовать при решении геометрических и физических задач.

Пример 5. Из формулы дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью под углом α к горизонту $l_0=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$, выразить скорость v_0. (Все величины положительные.)

Решение:

$l_0=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$; $v_0^2\sin 2\alpha=l_0 g$; $v_0^2=\dfrac{l_0 g}{\sin 2\alpha}$, т. к. все величины положительные, поэтому $v_0=\sqrt{\dfrac{l_0 g}{\sin 2\alpha}}$.

Пример 6. Из формул площади поверхности шара $S = 4\pi r^2$ и объема шара $V=\dfrac{4\pi r^2}{3}$ выразить объем шара V через площадь поверхности S. (Все величины положительные.)

Решение:

Из формулы $S = 4\pi r^2$ найдем радиус шара r:

$$4\pi r^2=S;\; r^2=\frac{S}{4\pi};$$

$$r=\sqrt{\frac{S}{4\pi}}=\frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Подставим это значение в формулу объема шара V:

$$V=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{4\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\pi}}\right)^3}{3}=\frac{4\pi\cdot\left(\sqrt{S}\right)^3}{3\cdot\left(2\sqrt{\pi}\right)^3}=\frac{4\pi\cdot S\sqrt{S}}{3\cdot 8\cdot\pi\sqrt{\pi}}=\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{\pi}}.$$

Тренировочные тестовые задания к разделу 2

1. Найдите второй двучлен в разложении на множители квадратного трехчлена $5x^2 - 45 = 5(x - 3)(...)$.

1) $(x - 5)$ 2) $(x + 3)$ 3) $(x - 3)$ 4) $(x + 5)$

2. При каких значениях a выражение $\frac{3}{|a|-1}$ не имеет смысла?

1) 1 2) $-1; +1$ 3) 1; 0 4) 3

3. Укажите выражение, тождественно равное дроби $\frac{a-4x}{2b+3y}$.

1) $\frac{x-4a}{3y+2b}$ 2) $\frac{a+4x}{2b-3y}$ 3) $\frac{4x-a}{-2b-2y}$ 4) $-\frac{a+4x}{3y-2b}$

4. Найдите значение выражения $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(1+\frac{a}{b}\right)$ при $a = 9\sqrt{7}$, $b = 6\sqrt{7}$.

1) $\frac{1}{3}$ 2) $16\sqrt{7}$ 3) $3\sqrt{7}$ 4) $-\frac{2}{3}$

5. Установите соответствие между заданными выражениями и выражениями, которые им тождественно равны.

А. $4b^2 + 2ab + a^2$
Б. $(a + 2b)(2a - b)$
В. $(2a - b)(b + 2a)$

1) $2a^2 + 3ab - 2b^2$
2) $b^2 - 4a^2$
3) $4a^2 - b^2$
4) $(a + 2b)^2$

Ответ:

А	Б	В

6. Если $\frac{3}{a} = b - \frac{1}{c}$, то $a = ...$

1) $\frac{3c}{bc-1}$ 2) $\frac{bc-3}{c}$ 3) $\frac{c}{3-bc}$ 4) $\frac{3b+c}{c}$

7. Если $\sqrt{299}+\sqrt{298} = a$, то $\sqrt{299}-\sqrt{298} = ...$

1) 1 2) $a - 1$ 3) $1 - a$ 4) $\frac{1}{a}$

8. Квадратный трехчлен $x^2 + px + 12$ имеет отрицательные корни, один из которых в 3 раза больше другого. Коэффициент p равен:

1) -8 2) 8 3) -6 4) 6

9. Упростите выражение $6-2\sqrt{5}$, представив подкоренное выражение в виде полного квадрата.

1) $\sqrt{5}+1$ 2) $1-\sqrt{5}$ 3) $\sqrt{5}-1$ 4) $6-\sqrt{5}$

10. Сократите дробь: $\frac{2x^2+3x-2}{x^2+2x}$.

1) $-\frac{2}{x+2}$ 2) $\frac{2x+1}{x+2}$ 3) $-\frac{2}{x}$ 4) $\frac{2x-1}{x}$

11. Найдите значение выражения $\dfrac{-x^2}{x+5}$ при $x = -3$.

Ответ: ____________________.

12. При каких значениях y выражение $\dfrac{3}{y^2 - 2y + 1}$ не имеет смысла?

Ответ: ____________________.

13. Упростите выражение $\left(\dfrac{3}{7}m^3n\right)^2 \cdot (-7mn^2)^3$ и найдите его значение при $m = -\dfrac{1}{3}$; $n = 3$.

Ответ: ____________________.

14. Выполните действия: $\dfrac{a^2}{a+1} - a + 1$.

Ответ: ____________________.

15. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2 - b^2}{3a + 3b} \cdot \dfrac{3a^2}{5b - 5a}$ при $a = 2{,}5$.

Ответ: ____________________.

16. Не решая уравнения $x^2 - 5x + 2 = 0$, найдите $x_1^2 + x_2^2$.

Ответ: ____________________.

17. Упростите выражение $A + B + C$, если $A = 2a^2 - 3ab + 4b^2$, $B = 3a^2 + 4ab - b^2$, $C = a^2 + 2ab + 3b^2$.

Ответ: ____________________.

18. Используя теорему Виета, найдите корни квадратного трехчлена $x^2 + 7x - 30$.

Ответ: ____________________.

19. Вычислите, используя разложение на множители способом группировки:

$$3\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{5} + 4{,}2 \cdot \frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{4}{5} + 2{,}8 \cdot \frac{2}{3}.$$

Ответ: ____________________.

20. Вычислите: $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$.

Ответ: ____________________.

3. Уравнения и неравенства

Знать:
- понятие уравнения;
- виды уравнений (линейное, квадратное, дробно-линейное, уравнение внешних степеней);
- системы уравнений (линейные и нелинейные), их графическая интерпретация;
- понятие о числовых неравенствах;
- неравенство с одной переменной (линейные и квадратные);
- системы неравенств.

Уметь:
- решать уравнения линейные и нелинейные;
- решать системы двух уравнений с двумя переменными;
- решать текстовые задачи алгебраическим способом путем перехода от алгебраической модели в систему уравнений;
- интерпретировать результат;
- исследовать уравнения и системы уравнений с параметрами;
- конструировать эквивалентные речевые высказывания с использованием алгебраических и геометрических языков;
- формулировать свойства числовых неравенств;
- распознавать линейные и нелинейные неравенства;
- решать линейные и квадратные неравенства, используя графические представления.

3.1. Уравнения

3.1.1. Уравнения с одной переменной, корень уравнения

Уравнение с одной переменной — это равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой. Неизвестное число в уравнении называется **переменной.**

Например, уравнение $3x - 4 = 5x + 1$ содержит переменную x; уравнение $3(y+1) = \frac{y}{4}$ содержит переменную y.

Выражение, записанное в уравнении слева от знака равенства, называется **левой частью уравнения**, а выражение, записанное справа, — **правой частью**.

Так, в уравнении $3x - 4 = 5x + 1$ левая часть: $3x - 4$; правая часть: $5x + 1$.

Корнем уравнения называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Например, число $-2{,}5$ является корнем уравнения $3x - 4 = 5x + 1$, поскольку $3 \cdot (-2{,}5) - 4 = 5 \cdot (-2{,}5) + 1$; $-11{,}5 = -11{,}5$.

Число 1 не является корнем этого уравнения, поскольку $3 \cdot 1 - 4 \neq 5 \cdot 1 + 1$; $-1 \neq 6$.

Пример 1. Какое из чисел 3, -2, 4 является корнем уравнения $5x - 8 = 2x + 4$?

Решение:

По определению корня при его подстановке в уравнение последнее должно обратиться в верное равенство.

Пусть $x = 3$, тогда $5 \cdot 3 - 8$ должно быть равно $2 \cdot 3 + 4$, но $7 \neq 10$. 3 не является корнем уравнения.

Пусть $x = -2$, тогда $5 \cdot (-2) - 8$ должно быть равно $2 \cdot (-2) + 4$, но $-18 \neq 0$. -2 не является корнем уравнения.

Пусть $x = 4$, тогда $5 \cdot 4 - 8 = 2 \cdot 4 + 4$, $12 = 12$. 4 — корень уравнения.

Ответ: 4.

Уравнение может иметь **различное количество корней.**

Например:

а) уравнение $5x = 20$ имеет **один корень,** $x = 4$;

б) уравнение $x(x + 3)(x - 7) = 0$ имеет **три корня:** $x = 0$; $x = -3$ и $x = 7$;

в) уравнение $x + 1 = x$ **не имеет корней,** поскольку при любых x левая часть на единицу больше правой;

г) уравнение $5(x - 3) = 5x - 15$ имеет **бесчисленное множество** корней, поскольку обращается в верное равенство при любых x.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Равносильные уравнения

Если уравнения имеют одни и те же корни, эти уравнения называются **равносильными.**

Уравнение $\frac{x(x-1)}{2} = 0$ и $x^2 = x$ равносильны, поскольку имеют корни: $x = 0$ и $x = 1$.

Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

Например, уравнения $x + 1 = x$ и $3 - x = 1 - x$ равносильны.

Процесс решения уравнения заключается в замене данного уравнения другим, равносильным ему.

Основные свойства уравнений:

1. Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный.
2. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Пример 2. Решить уравнение: $5(x - 3) - 2(x - 7) + 7(2x + 6) = 7$.

Решение:

Раскроем скобки в левой части уравнения: $5x - 15 - 2x + 14 + 14x + 42 = 7$.

Приведем подобные слагаемые: $17x + 41 = 7$.

Перенесем второе слагаемое в правую часть уравнения, изменив при этом его знак на противоположный: $17x = 7 - 41$; $17x = -34$.

Разделим обе части уравнения на 17: $x = -2$.

Ответ: -2.

3.1.2. Линейное уравнение

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называется **линейным уравнением.**

Например, $3x = 1$; $-2x = 5$; $-\frac{1}{2}x = 0$.

Корни линейного уравнения вида $ax = b$

1) $a \neq 0$, тогда $x = \dfrac{b}{a}$ — один корень;
2) $a = 0$, $b \neq 0$, тогда $0 \cdot x = b$, уравнение не имеет корней;
3) $a = 0$ и $b = 0$, тогда $0 \cdot x = 0$, уравнение имеет бесчисленное множество корней, т. е. любое число будет корнем этого уравнения.

Рассмотрим уравнения, сводящиеся к линейным.

Пример 1. Решить уравнение:

а) $-2x + 1 - 3(x - 4) = 4(3 - x) + 4$;

б) $\dfrac{3x-7}{4} - \dfrac{9x+11}{8} = \dfrac{3-x}{2}$;

в) $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{7x+5}{15} = \dfrac{x-2}{5}$;

г) $8(1{,}3x + 0{,}25) - 6{,}6x = 3{,}8x + 2$.

Решение:

а) Раскроем скобки в левой и правой частях уравнения. Приведем подобные слагаемые:

$$-2x + 1 - 3x + 12 = 12 - 4x + 4;$$
$$-5x + 13 = -4x + 16.$$

Перенесем слагаемые с переменной в левую часть уравнения, числа — в правую, меняя при этом знак переносимого слагаемого на противоположный:

$$-5x + 4x = 16 - 13;$$
$$-x = 3;$$
$$x = -3.$$

б) Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на 8, получим:

$$\frac{3x-7}{4} \cdot 8 - \frac{9x+11}{8} \cdot 8 = \frac{3-x}{2} \cdot 8;$$
$$2(3x - 7) - (9x + 11) = 4(3 - x);$$
$$6x - 14 - 9x - 11 = 12 - 4x;$$
$$-3x - 25 = 12 - 4x;$$
$$4x - 3x = 12 + 25;$$
$$x = 37.$$

в) Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на 15, после сокращения получим:

$$5(2x + 1) - (7x + 5) = 3(x - 2);$$
$$10x + 5 - 7x - 5 = 3x - 6;$$
$$3x = 3x - 6;$$
$$3x - 3x = -6;$$
$$0 \cdot x = -6.$$

Уравнение не имеет корней, поскольку не существует значения x, при котором $0 = -6$.

г) Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$10{,}4x + 2 - 6{,}6x = 3{,}8x + 2;$$
$$10{,}4x - 6{,}6x - 3{,}8x = 2 - 2;$$
$$0 \cdot x = 0.$$

Уравнение имеет бесчисленное множество корней, поскольку при любом значении x верно равенство $0 = 0$.

Ответ: а) 3; б) 37; в) корней нет; г) уравнение имеет бесчисленное множество корней.

Простейшие линейные уравнения с модулем

Уравнение вида $|f(x)| = a$, где $f(x)$ — многочлен первой степени, a — любое число, может иметь несколько решений:

1) $a > 0$
$f(x) = a$ или $f(x) = -a$

2) $a = 0$
$f(x) = 0$

3) $a < 0$
корней нет, поскольку $|f(x)| \geq 0$

Пример 2. Решить уравнение:

а) $|x| = 2{,}5$;

б) $|x| = -\dfrac{1}{3}$;

в) $|5x - 1| = 4$;

г) $|2x - 1| = x$.

Решение:

а) $x_1 = 2{,}5$; $x_2 = -2{,}5$;

б) корней нет;

в) $5x - 1 = 4$ или $5x - 1 = -4$
$5x = 5$ $\quad 5x = -3$
$x_1 = 1$ $\quad x_2 = -0{,}6$

г) Очевидно, что уравнение имеет решение при условии, что $x \geq 0$. Тогда:
$2x + 1 = x$ или $2x + 1 = -x$
$x_1 = -1$ $\quad 3x_2 = -1$
$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

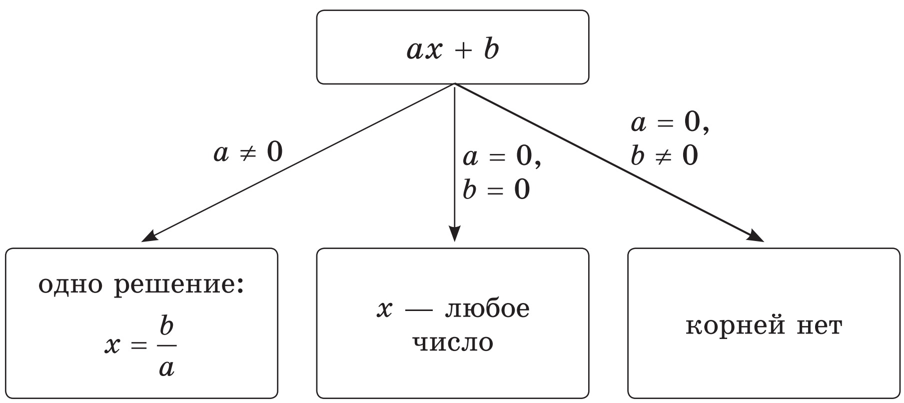
Оба корня являются посторонними, поскольку не удовлетворяют условию $x \geq 0$.

Ответ: а) 2,5; –2,5; б) корней нет; в) 1; –0,6; г) корней нет.

Линейное уравнение с одной переменной, содержащее параметр

Величина, входящая в уравнение или неравенство и сохраняющая свою величину, называется **параметром**.

Итак, линейное уравнение может иметь:



Пример 3. Решить уравнение с параметром:

а) $ax = 0$;

б) $mx = m$;

в) $x + 5 = ax$; $x - ax = 5$; $x(1 - a) = 5$;

г) $(a^2 - 5a + 6)x = a^2 + 2a - 8$.

Решение:

а) Если $a = 0$, то $0 \cdot x = 0$, x — любое число.

Если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{0}{a} = 0$, один корень.

б) Если $m = 0$, то $0 \cdot x = 0$, x — любое число.

Если $m \neq 0$, то $x = \frac{m}{m}$; $x = 1$, один корень.

в) Если $a = 1$, то $0 \cdot x = 5$, корней нет.

Если $a \neq 1$, то $x = \frac{5}{1-a}$.

г) Разложим на множители выражение $a^2 - 5a + 6$ и $a^2 + 2a - 8$.
$a^2 - 5a + 6 = (a - 3)(a - 2)$; $a^2 + 2a - 8 = (a + 4)(a - 2)$.
Тогда $(a - 3)(a - 2)x = (a + 4)(a - 2)$.
Если $a = 3$, то $0 \cdot x = 7$, корней нет.
Если $a = 2$, то $0 \cdot x = 0$, x — любое число.

Если $a \neq 2$ и $a \neq 3$, то $x = \frac{(a+4)(a-2)}{(a-3)(a-2)}$; $x = \frac{a+4}{a-3}$; один корень.

3.1.3. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется **квадратным уравнением.**

Числа a, b и c — **коэффициенты квадратного уравнения**. a — первый коэффициент; b — второй коэффициент; c — свободный член.

Например, $3x^2 + 5x - 4 = 0$ — квадратное уравнение, в котором первый коэффициент $a = 3$, второй коэффициент $b = 5$, свободный член $c = -4$.

Если первый коэффициент $a = 1$, уравнение называется **приведенным.**

Например, $x^2 - 7x + 9 = 0$ — приведенное квадратное уравнение.

Если в квадратном уравнении $b = 0$ и (или) $c = 0$, то уравнение называется **неполным.**

Решение неполных квадратных уравнений

Виды уравнений	Примеры
$\boldsymbol{c = 0}$ $ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$	$2x^2 - 7x = 0$ $x(2x - 7) = 0$ $x = 0$ или $2x - 7 = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = 3{,}5$
$\boldsymbol{b = 0}$ $ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$: а) $c > 0$, корней нет; б) $c < 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	а) $3x^2 - 9 = 0$ $3x^2 = 9$ $x^2 = 3$ $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$ б) $x^2 + 16 = 0$ $x^2 = -16$ корней нет
$\boldsymbol{b = 0,\ c = 0}$ $ax^2 = 0$ $x = 0$	$7x^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x = 0$

Решение полных квадратных уравнений

Решение уравнений методом выделения полного квадрата

Пример 1. Решить уравнение методом выделения полного квадрата:

$x^2 - 6x + 5 = 0;$

$x^2 - 6x + 9 - 4 = 0;$

$(x - 3)^2 = 4$

$x - 3 = 2$ или $x - 3 = -2$

$x_1 = 5$ $\quad$ $x_2 = 1.$

Решение квадратного уравнения по формуле

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно найти по формулам:

Квадратное уравнение	Дискриминант $D = b^2 - 4ac$	Корни уравнения
$ax^2 + bx + c = 0$	$D > 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
	$D < 0$	корней нет
	$D = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$

Если записать вычисление дискриминанта и нахождение корней в одну формулу, получим:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)}$$

Пример 1. Решить квадратное уравнение:

а) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$;

б) $5x^2 - 4x + 10 = 0$; $a = 5$, $b = -4$, $c = 10$;

в) $x^2 - 10x + 25 = 0$; $a = 1$, $b = -10$, $c = 25$.

Решение:

а) $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 1}{4}$; $x_1 = \dfrac{-3 - 1}{4} = -1$; $x_2 = \dfrac{-3 + 1}{4} = -\dfrac{1}{2}$;

б) $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 1}{4}$; $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5 \cdot 10}}{5 \cdot 2}$;

но $16 - 4 \cdot 5 \cdot 10 < 0$, корней нет;

в) $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 1}{4}$; $x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \dfrac{10}{2} = 5.$

Ответ: а) $-\dfrac{1}{2}$; б) корней нет; в) 5.

Если **второй коэффициент квадратного уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ четный** ($b = 2k$), можно применить формулы:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \quad (2)}$$

Если первый коэффициент квадратного уравнения равен 1 ($a = 1$), а второй коэффициент четный ($b = 2k$), то можно применить формулу:

$$\boxed{x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c} \quad (3)}$$

Пример 2. Решить уравнение:
а) $7x^2 - 6x - 1 = 0$; б) $x^2 - 16x - 161 = 0$.

Решение:

а) Применим формулу (2):

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 7 \cdot (-1)}}{7} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 7}}{7} = \frac{3 \pm 4}{7}; \quad x_1 = \frac{3 - 4}{7} = -\frac{1}{7}; \quad x_2 = \frac{3 + 4}{7} = 1;$$

б) Применим формулу (3):

$$x_{1,2} = 8 \pm \sqrt{64 + 161} = 8 \pm \sqrt{225} = 8 \pm 15; \; x_1 = 8 - 15 = -7; \; x_2 = 8 + 15 = 23.$$

Исследование квадратного уравнения по дискриминанту и коэффициентам

Пример 3. При каком значении a уравнение $ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ имеет один корень?

Решение:

Уравнение имеет один корень, если дискриминант равен нулю, т. е.

$$D = (a + 1)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2.$$

$$(a - 1)^2 = 0, \text{ тогда } a = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 4. Решить уравнение в зависимости от параметра b: $x^2 + 2x - b^2 + 2b = 0$.

Решение:

Найдем дискриминант этого уравнения:

$$D = 2^2 - 4(-b^2 + 2b) \cdot 1 = 4 + 4b^2 - 8b = 4b^2 - 8b + 4 = 4(b^2 - 2b + 1) = 4(b - 1)^2.$$

Данное уравнение имеет один корень или два различных корня, поскольку $D = 4(b - 1)^2 \geq 0$.

Если $b = 1$, $D = 0$, один корень $x = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Если $b \neq 1$, $D > 0$, два корня $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4(b-1)^2}}{2}$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{(b-1)^2}$;

$$x_1 = -1 - (b - 1) = -1 - b + 1 = -b; \; x_2 = -1 + (b - 1) = -1 + b - 1 = b - 2.$$

Ответ: при $b = 1$ $x = -1$; при $b \neq 1$ два корня: $x_1 = -b$ и $x_2 = b - 2$.

3.1.4. Решение рациональных уравнений. Решение иррациональных уравнений

Уравнение называется **рациональным**, если его левая и правая части представлены рациональными выражениями.

Например, уравнения $2x - 7 = 5(x - 1)$; $x + \dfrac{1}{x} = 3$; $x^2 - \dfrac{x - 1}{x + 2} = 0$ являются рациональными.

Целым называется рациональное уравнение, левая и правая части которого представлены целыми выражениями.

Например, $x^2 - 3x + 1 = 0$; $\dfrac{x}{2} + x^2 = \dfrac{x - 1}{3}$ — целые уравнения.

Дробным называется рациональное уравнение, у которого хотя бы одна часть — дробное выражение.

Например, $x^2 - x = \dfrac{1}{x-2}$; $\dfrac{3x-1}{x+1} = 1$.

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений:

1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
3. Решить полученное целое уравнение.
4. Исключить из корней уравнения те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Пример 1. Решить уравнение:

а) $\dfrac{x^2 - x}{x+4} = 0$; б) $\dfrac{4x^2 - 1}{x + \frac{1}{2}} = 0$; в) $\dfrac{x+4}{4x^2 + 4x + 1} - \dfrac{10}{1-2x} = \dfrac{15}{2x+1}$.

Решение:

а) Используем условие равенства дроби нулю: числитель этой дроби должен быть равен нулю, а знаменатель не равен нулю:

$x^2 - x = 0$ и $x + 4 \neq 0$

$x(x - 1) = 0$ $\quad$ $x \neq -4$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$

б) Аналогично примеру *а*:

$4x^2 - 1 = 0$; и $x + \dfrac{1}{2} \neq 0$;

$x^2 = \dfrac{1}{4}$ $\quad$ $x \neq -\dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, но второй корень посторонний, поскольку при $x = -\dfrac{1}{2}$ знаменатель обращается в нуль.

в) Разложим на множители знаменатели и найдем общий знаменатель дробей, входящих в уравнение:

$$\frac{x+4^{\backslash 2x-1}}{(2x+1)^2} + \frac{10^{\backslash (2x+1)^2}}{2x-1} = \frac{15^{\backslash (2x-1)(2x+1)}}{2x+1}.$$

Общий знаменатель $(2x + 1)^2(2x - 1)$ обращается в нуль, если $x = -\dfrac{1}{2}$ или $x = \dfrac{1}{2}$. Значит, эти числа не могут быть корнями уравнения.

$$(x + 4)(2x - 1) + 10(2x + 1)^2 = 15(2x - 1)(2x + 1);$$
$$2x^2 - x + 8x - 4 + 40x^2 + 40x + 10 = 60x^2 - 15;$$
$$-18x^2 + 47x + 21 = 0;$$
$$18x^2 - 47x - 21 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{47 \pm \sqrt{2\,209 - 4 \cdot 18 \cdot 21}}{36} = \frac{47 \pm 61}{36};\ x_1 = \frac{47-61}{36} = -\frac{7}{18};\ x_2 = \frac{47+61}{36} = 3.$$

Среди полученных корней нет чисел $\dfrac{1}{2}$ или $-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: а) 0 и 1; б) $\dfrac{1}{2}$; в) $-\dfrac{7}{18}$; 3.

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{x^2(a+1)x+a}{x-2}=0$ с параметром a.

Решение:

$$x^2-(a+1)x+a=0 \text{ и } x-2\neq 0,\ x\neq 2.$$

Найдем дискриминант:

$$D=(a+1)^2-4a=a^2+2a+1-4a=a^2-2a+1=(a-1)^2;\ \sqrt{D}=\pm(a-1);$$

$$x_1=\frac{(a+1)+(a-1)}{2}=\frac{2a}{2}=a;\quad x_2=\frac{(a+1)-(a-1)}{2}=1;$$

если $a=1$, то один корень $x=\dfrac{(a+1)}{2}=1$.

Получим, что $x_1=a$, но при $x=2$ уравнение решений не имеет, т. е. при $a=2$ решений нет.

Ответ: 1) если $a=2$, корней нет; 2) если $a=1$, один корень — 1; 3) если $a\neq 2$ и $a\neq 1$, то уравнение имеет два корня: 1 и a.

Решение иррациональных уравнений

Если в уравнении неизвестная величина содержится под знаком радикала, то такие уравнения называются **иррациональными.**

Одним из способов решения иррациональных уравнений является возведение обеих частей уравнения в квадрат или степень, равную показателю корня.

Решение уравнений вида (a — число) $\sqrt{f(x)}=a$

$a\geq 0$	$a<0$
$f(x)=a^2$	решений нет

Пример 3. Решить уравнение:

а) $\sqrt{2x+1}=3$;
$2x+1=9$;
$x=4$.

б) $\sqrt{5x-1}=0$;
$5x-1=0$;
$x=\dfrac{1}{5}$.

в) $\sqrt{x+1}=-3$;
корней нет.

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)}=\varphi(x)$

Решение: $\begin{cases} f(x)=\varphi^2(x), \\ \varphi(x)\geq 0. \end{cases}$

Пример 4. Решить уравнение: $\sqrt{x+2}=x$.

Решение:

$$\begin{cases} x+2=x^2, \\ x\geq 0; \end{cases}\quad \begin{cases} x^2-x-2=0, \\ x\geq 0; \end{cases}\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x\geq 0; \end{cases}\ x=2.$$

Ответ: 2.

Решение более сложных уравнений методом возведения обеих частей уравнения в квадрат

Пример 5. Решить уравнение: $(x-5)(x+2)\sqrt{x-7}=0$.

Решение:

Исходное уравнение можно заменить совокупностью уравнений:

$x-5=0$; $x+2=0$; $\sqrt{x-7}=0$ при условии, что $x-7\geq 0$; $x\geq 7$.
$x_1=5$; $x_2=-2$; $x_3=7$, условию $x\geq 7$ удовлетворяет только корень $x=7$.
Ответ: 7.

Если при решении уравнений делается проверка, то можно решать уравнения, не находя область допустимых значений или с помощью равносильных переходов, как в примере 4.

Пример 6. Решить уравнение: $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

Решение:

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}\right)^2=2^2;\quad x+2-2\sqrt{(x+2)(x-6)}+x-6=4;$$

$$2\sqrt{x^2-4x-12}=2x-8;\; x^2-4x-12=x^2-8x+16;\; x=7.$$

Проверка показала, что $x=7$ — корень уравнения.
Ответ: 7.

Метод введения новых переменных

Пример 7. Решить уравнение:
а) $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$; б) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

Решение:

а) Сделаем замену переменной $\sqrt[6]{x+1}=t$.

Тогда $2t^2-t=6$; $2t^2-t-6=0$; $t_1=2$; $t_2=-\dfrac{3}{2}$.

Вернемся к первоначальной переменной: $\sqrt[6]{x+1}=2$; $x+1=2^6$; $x=31$;
$\sqrt[6]{x+1}=-\dfrac{3}{2}$; корней нет, т. к. $\sqrt[6]{x+1}\geq 0$.

б) Раскроем скобки:
$x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$ или $x^2+5x+2-3\sqrt{x^2+5x+2}-4=0$.
Обозначим $\sqrt{x^2+5x+2}=t$, получим уравнение $t^2-3t-4=0$.
Уравнение имеет корни $t_1=-1$, $t_2=4$.
Уравнение $\sqrt{x^2+5x+2}=-1$ не имеет решений, т. к. $\sqrt{x^2+5x+2}\geq 0$.
$\sqrt{x^2+5x+2}=4$; $x^2+5x+2=16$; $x^2+5x-14=0$; $x_1=2$; $x_2=-7$.
Ответ: а) 31; б) -7; 2.

3.1.5. Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители

Существует несколько методов решения целых уравнений высших степеней (степени больше 2).

Метод разложения многочлена на множители

Этот метод применяется в случаях, когда левая часть — многочлен, который возможно разложить на множители, а правая часть уравнения равна нулю.

Пример 1. Решить уравнение: а) $x^3+4x^2-2x-8=0$; б) $x^3+x-2=0$.
а) Разложим на множители способом группировки многочлен, стоящий в левой части уравнения:

$(x^3 + 4x^2) - (2x + 8) = 0;\ x^2(x + 4) - 2(x + 4) = 0;$

$(x + 4)(x^2 - 2) = 0;\ (x+4)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0;$

$x_1 = -4;\ x_2 = \sqrt{2};\ x_3 = -\sqrt{2}.$

б) $x^3 - 1 + x - 1 = 0;$

$(x - 1)(x^2 + x + 1) + 1(x - 1) = 0;$

$(x - 1)(x^2 + x + 1 + 1) = 0;$

$(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0;$

$x - 1 = 0;\ x_1 = 1$ или $x^2 + x + 2 = 0$, уравнение не имеет корней.

Ответ: 1.

Метод замены переменной

Метод замены переменной — один из самых распространенных и универсальных.

Уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называются **биквадратными** ($a \neq 0$) и решаются путем замены $x^2 = t$.

Пример 2. Решить уравнение: $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$.

Решение:

Сделаем замену: $x^2 = t$, тогда получим уравнение $4t^2 - 17t + 4 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8};$$

$$t_1 = \frac{17+15}{8} = \frac{32}{8} = 4;\ \ t_2 = \frac{17-15}{8} = \frac{1}{4}.$$

Вернемся к переменной x:

$$x^2 = 4;\ x_1 = -2;\ x_2 = 2;$$

$$x^2 = \frac{1}{4};\ \ x_3 = \frac{1}{2};\ \ x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-2;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 2.$

Иногда в уравнении выгодно заменить другой переменной не одночлен, а многочлен или дробное выражение.

Пример 3. Решить уравнение:

а) $(2x^2 + x + 1)(2x^2 + x + 3) = 8$; б) $\dfrac{x^2+4x+9}{x-3} + \dfrac{x-3}{x^2+4x+9} = -2.$

Решение:

а) Сделаем замену $t = 2x^2 + x + 1$, тогда получим уравнение:

$$t(t + 2) = 8;$$
$$t^2 + 2t - 8 = 0;$$
$$t_1 = 2;\ t_2 = -4.$$

Вернемся к переменной x:

$$2x^2 + x + 1 = 2;$$
$$2x^2 + x - 1 = 0;$$
$$x_1 = -1;\ \ x_2 = \frac{1}{2};$$
$$2x^2 + x + 1 = -4;$$

$2x^2 + x + 5 = 0$; это уравнение корней не имеет.

б) Сделаем замену $\dfrac{x^2+4x+9}{x-3}=t$, получим уравнение:

$$t+\frac{1}{t}=-2;$$
$$t^2+2t+1=0;$$
$$(t+1)^2=0;$$
$$t=-1.$$

Тогда $\dfrac{x^2+4x+9}{x-3}=-1$; $x\neq 3$;

$$x^2+4x+9=-x+3;$$
$$x^2+5x+6=0;$$
$$x_1=-2;\ x_2=-3.$$

Ответ: а) -1; $\dfrac{1}{2}$; б) -3; -2.

Метод почленного деления уравнения на x^2 с последующей заменой переменной

Уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2+bx+c=0$ и $ax^4+bx^3+cx^2+dx+m=0$, где $\dfrac{a}{m}=\left(\dfrac{b}{d}\right)^2$, называют **возвратными** и решают методом почленного деления уравнения на x^2 и последующей заменой переменной.

Пример 4. Решить уравнение: $3x^4-2x^3+4x^2-4x+12=0$.

Решение:

Заметим, что $\dfrac{3}{12}=\left(\dfrac{-2}{-4}\right)^2$, т. к. $\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

Разделим уравнение почленно на x^2 ($x=0$ не является корнем уравнения, и деление не приведет к потере корня):

$$\frac{3x^4}{x^2}-\frac{2x^3}{x^2}+\frac{4x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{12}{x^2}=0;\ \ 3x^2-2x+4-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0;$$

$$3\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{2}{x}\right)+4=0.$$

Сделаем замену $x+\dfrac{2}{x}=t$, тогда $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=t^2$, поэтому $x^2+4+\dfrac{4}{x^2}=t^2$, значит, $x^2+\dfrac{4}{x^2}=t^2-4$, получим $3(t^2-4)-2t+4$; $t_1=2$; $t_2=-\dfrac{4}{3}$.

Вернемся к первоначальной переменной:

$x+\dfrac{2}{x}=2$; $x^2-2x+2=0$; это уравнение корней не имеет;

$x+\dfrac{2}{x}=-\dfrac{4}{3}$; $3x^2+4x+6=0$; это уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Рассмотрим еще несколько нестандартных приемов для решения уравнений.

Пример 5. Решить уравнение:

а) $x(x-1)(x-2)(x-3)=15$; б) $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=27$.

Решение:

а) Сгруппируем множители x и $(x - 3)$; $(x - 1)$ и $(x - 2)$, перемножим $x(x - 3) \times$ $\times (x - 1)(x - 2) = 15$; $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 15$.

Замена: $x^2 - 3x = t$, тогда $t(t + 2) = 15$; $t^2 + 2t - 15 = 0$; $t_1 = 3$; $t_2 = -5$.

$x^2 - 3x = 3$; $x^2 - 3x - 3 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$;

$x^2 - 3x = -5$; $x^2 - 3x + 5 = 0$; корней нет.

б) Левая часть уравнения — сумма квадратов, поэтому прибавим к обеим частям уравнения удвоенное произведение этих выражений:

$$x^2 - 2x\frac{3x}{x+3} + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 27 - 2x\frac{3x}{x+3};$$

$$\left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 = 27 - \frac{6x^2}{x+3}; \ \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + 6\frac{x^2}{x+3} - 27 = 0.$$

Замена: $\dfrac{x^2}{x+3} = t$. $t^2 + 6t - 27 = 0$; $t_1 = -9$; $t_2 = 3$.

$\dfrac{x^2}{x+3} = -9$; $x^2 + 9x + 27 = 0$; корней нет;

$\dfrac{x^2}{x+3} = 3$; $x \neq -3$; $x^2 - 3x - 9 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$; б) $\dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

3.1.6. Уравнение с двумя переменными. Решение уравнений с двумя переменными

Уравнение с двумя переменными x и y имеет вид: $f(x; y) = \varphi(x; y)$, где f и φ — выражение с переменными x и y.

Например, $x^2 + y^2 = xy$; $2x + 1 = 3y + x$; $xy = 6$ — уравнения с двумя переменными.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, при которых уравнение превращается в верное равенство.

Например, пара чисел $x = 2$, $y = 3$ является решением уравнения $xy = 6$.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же корни, называют **равносильными**.

Например, уравнение $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ и уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ являются равносильными.

Уравнения, не имеющие решений, также называют равносильными.

Уравнения с двумя переменными имеют **такие же свойства**, что и уравнения с одной переменной:

- если в уравнении перенести слагаемые из одной части в другую, изменив при этом его знак на противоположный, получим уравнение, равносильное данному;
- если в уравнении обе части умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получим уравнение, равносильное данному.

Пример 1. Рассмотрим уравнение: $5x + 2y - 4 = 3(x + y - 1)$.

Раскроем скобки, перенесем слагаемые с переменными в левую часть, изменив при этом их знаки, а числа — в правую часть:

$$5x + 2y - 4 = 3x + 3y - 3;\ 5x - 3x + 2y - 3y = 4 - 3;\ 2x + y = 1.$$

Получили уравнение, равносильное исходному.

Уравнение с двумя переменными имеет бесчисленное множество решений.

Пример 2. Решениями уравнения $x + y = 7$ являются пары чисел (3; 4); (4; 3); (−1; 8); (0; 7) и т. д.

Чтобы найти пары таких решений, нужно записать уравнение в виде $y = 7 - x$, задать значение x и получить соответствующие значения y, т. е. если $x = 5$, то $y = 7 - x = 7 - 5 = 2$; если $x = -10$, то $y = 7 - (-10) = 17$ и т. д.

Пример 3. Найти несколько решений уравнения $xy - 2 = 2x - y$.

Решение:

Очевидно, что способом, указанным в примере 2, это будет сделать сложно. Задаем произвольные значения x и получаем при этом уравнение относительно y.

Если $x = 0$, то $xy - 2 = 2x - y$ имеет вид $-2 = -y$, $y = 2$. Получили пару (0; 2).

Если $x = 1$, то $xy - 2 = 2x - y$ имеет вид $y - 2 = 2 - y$; $2y = 4$; $y = 2$. Получили пару (1; 2).

Можно задавать значения y, получая при этом значения x.

Если $y = 0$, то $xy - 2 = 2x - y$ имеет вид $-2 = 2x$; $x = -1$. Получили пару (−1; 0).

Для того чтобы найти решение уравнения с двумя переменными, нужно подставить в него произвольное значение одной переменной и решить уравнение с одним неизвестным относительно второй.

График уравнения с двумя переменными

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек, координаты которых служат решениями этого уравнения.

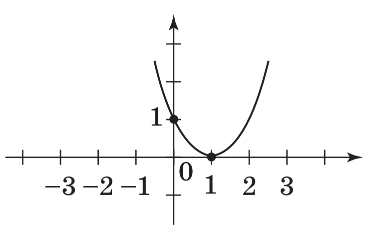
Например, график линейного уравнения $ax + by + c = 0$ представляет собой **прямую**; график уравнения $y = ax^2 + bx + c$ — **параболу**; график уравнения $xy = k$ $(k \neq 0)$ — **гиперболу**.

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$, где x и y — переменные, r — положительное число, является **окружность** с центром в начале координат и радиусом, равным r.

Графиком уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, где x и y — переменные, r, a и b — числа $(r > 0)$, является окружность с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r.

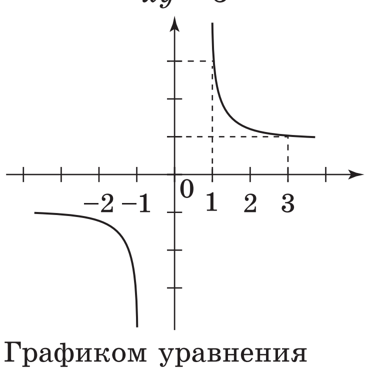
Пример 4.

$y = x^2 - 2x + 1$



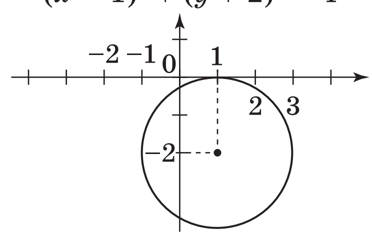
Графиком уравнения является парабола (*подробнее о построении парабол см. п. 5.1.7*)

$xy = 3$



Графиком уравнения является гипербола (*подробнее о построении гипербол см. п. 5.1.6*)

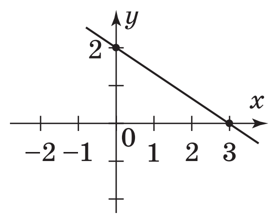
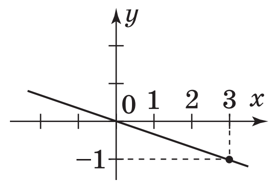
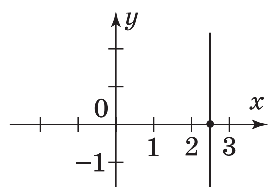
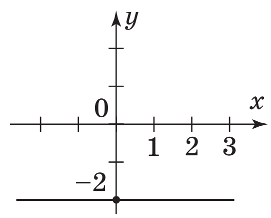
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$



Графиком уравнения является окружность с центром в точке (1; −2) и радиусом, равным 2 (*подробнее см. п. 6.2.5*)

График линейного уравнения с двумя переменными

Множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями уравнения $ax + by = c$, называется **графиком линейного уравнения** $ax + by + c = 0$.

Зависимость	График	
$b \neq 0;\ a \neq 0;\ c \neq 0$ $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$	$2x + 3y = 6$ График этого уравнения — прямая. Построим ее по двум точкам, например (0; 2), (3; 0)	
$a \neq 0;\ b \neq 0;\ c = 0$ $y = -\dfrac{a}{b}x$	$x + 3y = 0$ или $y = -\dfrac{1}{3}x$ График этого уравнения — прямая, проходящая через начало координат	
$a \neq 0;\ b = 0;\ c \neq 0$ $ax = c$ $x = \dfrac{c}{a}$	$2x = 5;$ $x = 2{,}5$ График этого уравнения — прямая, параллельная оси Oy	
$a = 0;\ b \neq 0;\ c \neq 0$ $by = c$ $y = \dfrac{c}{b}$	$3y = -6;$ $y = -2$ График этого уравнения — прямая, параллельная оси Ox	
$a = 0;\ b = 0;\ c \neq 0$ $0 = c$	Уравнение решений не имеет	
$a = b = c = 0$ $0 = 0$	Графиком является вся координатная плоскость	

Рассмотрим более сложные примеры.

Пример 5. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $(x - 2)(y + 1) = 0$; б) $(y - 2)^2 = (x + 1)^2$.

Решение:

а) Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них обращается в нуль, т. е. $x - 2 = 0$ или $y + 1 = 0$, т. е. $x = 2$ или $y = -1$. Графиком такого уравнения являются две прямые вида $x = 2$ и $y = -1$.

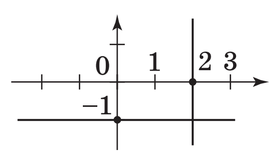


Рис. 3.1

б) $(y-2)^2=(x+1)^2$, тогда $(y-2)=(x+1)$ или $y-2=$ $=x+1$ или $y-2=-x-1$. Получаем объединение двух прямых $y=x+3$ и $y=-x+1$.

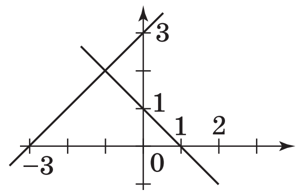


Рис. 3.2

3.1.7. Система уравнений; решение системы уравнений с двумя переменными

Системой уравнений называются два или более уравнения, у которых необходимо найти все **общие решения**.

Уравнения системы записывают столбиком и объединяют фигурной скобкой.

Например, $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-y^2+1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=7, \\ 2x-3y+z=-1, \\ -x+2y-z=0. \end{cases}$

Число переменных в системе может не равняться числу уравнений.

Решить систему означает найти все ее решения.

Система называется **определенной**, если она имеет конечное число решений, и **неопределенной**, если она имеет бесконечное число решений.

Две системы называют **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Система уравнений называется **линейной**, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными.

Например, система $\begin{cases} x+3y=5, \\ -2x+y=-3 \end{cases}$ является линейной.

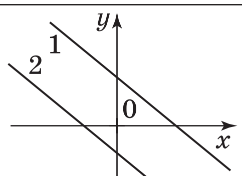
Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара чисел, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

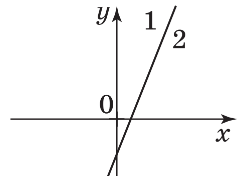
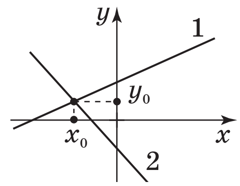
Например, пара чисел $(-2; 1)$ является решением системы $\begin{cases} x+y=-1, \\ 3x-2y=-8. \end{cases}$

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая, поэтому количество решений системы линейных уравнений зависит от взаимного расположения двух прямых, являющихся графиками соответствующих уравнений.

Количество решений линейной системы двух уравнений с двумя переменными в зависимости от коэффициентов при неизвестных.

Пусть даная система линейных уравнений: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

Зависимость коэффициентов	**Графическая интерпретация**	**Примеры**
Если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$, система решений не имеет	 1) $a_1x+b_1y=c_1$; 2) $a_2x+b_2y=c_2$ Прямые параллельны, точек пересечения нет	$\begin{cases} 2x-4y=3, \\ -4x+8y=7; \end{cases}$ $\dfrac{2}{-4}=\dfrac{-4}{8}\neq\dfrac{3}{7}$; решений нет

Зависимость коэффициентов	Графическая интерпретация	Примеры
Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, система имеет бесконечное множество решений (неопределенна)	 1) $a_1x + b_1y = c_1$; 2) $a_2x + b_2y = c_2$ Прямые совпадают, все точки прямых являются решениями	$\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ -10x - 6y = -2; \end{cases}$ $\dfrac{5}{-10} = \dfrac{3}{-6} = \dfrac{1}{-2}$; бесконечное множество решений
$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ — одно решение	 1) $a_1x + b_1y = c_1$; 2) $a_2x + b_2y = c_2$ Прямые пересекаются, точка пересечения $(x_0;\ y_0)$ — решение системы	$\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 6x + 7y = 1; \end{cases}$ одно решение

Пример 1. В линейном уравнении найти значение x, которое является корнем уравнения $2x - y = 5$ при $y = -3$.

Решение:

Подставим значение $y = -3$ в уравнение, получим $2x - (-3) = 5$; $2x + 3 = 5$; $2x = 2$; $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 2. Дана система уравнений: $\begin{cases} x^2 + y = -1, \\ 2x + 3y = -4. \end{cases}$

Из пар чисел найти ту, которая удовлетворяет этой системе:
а) $(-1;\ 2)$; б) $(1;\ -2)$; б) $x = 1$; $y = -2$.

Решение:

а) $x = -1$; $y = 2$. Подставим эти значения в систему уравнений:

$\begin{cases} x^2 + y = -1, \\ 2x + 3y = -4; \end{cases}$ $\begin{cases} (-1)^2 + 2 \neq -1, \\ 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \neq -4; \end{cases}$ $(-1;\ 2)$ не удовлетворяет системе уравнений.

б) $x = 1$; $y = -2$ Подставим эти значения в систему уравнений:

$\begin{cases} x^2 + y = -1, \\ 2x + 3y = -4; \end{cases}$ $\begin{cases} 1^2 - 2 = -1 \text{ — верно, т. к. } -1 = -1, \\ 2 \times 1 + 3 \times (-2) = -4 \text{ — верно, т. к. } -4 = -4; \end{cases}$

$(1;\ -2)$ удовлетворяет данной системе.

Пример 3. Известно, что пара чисел $x = -3$; $y = 1$ является решением системы уравнений: $\begin{cases} ax - 3y = -9, \\ -2x + by = 11. \end{cases}$ Найти a и b.

Решение:

По условию $x = -3$, $y = 1$ — решение системы уравнений, т. е. при подстановке этих чисел в уравнения получим верные равенства.

Подставим эти числа в систему:

$$\begin{cases} a\cdot(-3)-3\cdot 1=-9, \\ -2\cdot(-3)+b\cdot 1=11; \end{cases} \begin{cases} -3a-3=-9, \\ 6+b=11; \end{cases} \begin{cases} a=2, \\ b=5. \end{cases}$$

Ответ: $a = 2$, $b = 5$.

Пример 4. Сколько решений имеет система уравнений?

а) $\begin{cases} x+y=4, \\ x+y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=-3x, \\ 6x+2y=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=x-3, \\ 2x-2y=6. \end{cases}$

Решение:

Система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ имеет решение, если $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$;

при $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ — решений нет;

при $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ — бесконечное множество решений.

а) $\begin{cases} x+y=4, \\ x+y=-1; \end{cases}$ $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 4$; $a_2 = 1$, $b_2 = 1$, $c_2 = -1$, т. е. $\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{4}{-1}$, система не имеет решения.

б) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 2x-y=-1; \end{cases}$ $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $c_1 = 8$; $a_2 = 2$, $b_2 = -1$, $c_1 = 1$, т. е. $\dfrac{2}{2}\neq\dfrac{1}{-1}$, система имеет единственное решение.

в) $\begin{cases} y=-3x, \\ 6x+2y=-1. \end{cases}$

Представим систему в виде: $\begin{cases} 3x+y=0, \\ 6x+2y=-1; \end{cases}$ $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$; $a_2 = 6$, $b_2 = 2$, $c_2 = -1$, т. е. $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{0}{-1}$, решений нет.

г) $\begin{cases} y=x-3, \\ 2x-2y=6. \end{cases}$ Представим систему в виде: $\begin{cases} x-y=3, \\ 2x-2y=6; \end{cases}$ $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = 3$; $a_2 = 2$, $b_2 = -2$, $c_2 = 6$, т. е. $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{3}{6}$. Система имеет бесконечное множество решений.

3.1.8. Система двух линейных уравнений с двумя переменными: решение подстановкой и алгебраическим сложением

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2; \end{cases}$$

называется **линейной системой уравнений** с переменными x и y; a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 — некоторые числа.

Основные методы решения систем двух линейных уравнений

Графический способ

Чтобы решить систему линейных уравнений графическим способом, необходимо:

1) построить графики уравнений в одной координатной плоскости;
2) найти координаты точек пересечения графиков или убедиться в том, что графики не пересекаются (параллельны) или совпадают;
3) если координаты точек пересечения — целые числа, сделать проверку; если нет, то определить приближенно, могут ли полученные числа являться решениями;
4) записать ответ.

Пример 1. Решить графически систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 4, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$

Решение:

Построим графики функций: $x - y = 4$; $y = x - 4$.

x	0	4
y	-4	0

$3x + 2y = 7$; $y = -1{,}5x + 3{,}5$.

x	1	-1
y	2	5

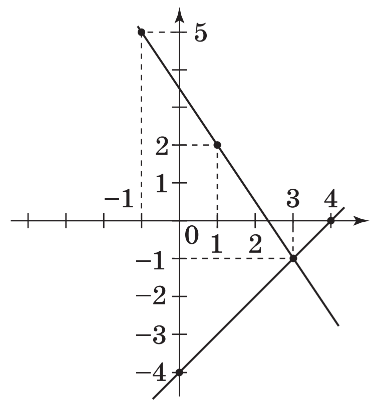


Рис. 3.3

Точка пересечения графиков $x = 3$, $y = -1$.

Сделаем проверку: $\begin{cases} x - y = 4, \\ 3x + 2y = 7; \end{cases}$ $3 - (-1) = 4$;

$3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 7$ — верно.

Ответ: $(3; -1)$.

Способ подстановки для решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными

Чтобы решить систему линейных уравнений способом подстановки, необходимо:

1) выразить одну переменную из какого-либо уравнения системы через другую;
2) подставить вместо этой переменной в другое уравнение полученное выражение;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) найти соответственное значение другой переменной;
5) записать ответ.

Пример 2. Решить систему уравнений способом подстановки: $\begin{cases} 3x + 4y = -3, \\ y - 3x = 18. \end{cases}$

Решение:

Из второго уравнения системы выразим y и подставим это выражение в первое уравнение:

$$y - 3x = 18;\ y = 3x + 18;\ 3x + 4(3x + 18) = -3.$$

Решим полученное уравнение с одной переменной:

$$3x + 12x + 72 = -3;\ 15x = -75;\ x = -5.$$

Найдем соответственное значение y:

$$y = 3x + 18 = 3 \cdot (-5) + 18 = 3.$$

Ответ: $(-5;\ 3)$.

Способ сложения для решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными

Пример 3. Решить систему уравнений способом сложения: $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = -2. \end{cases}$

Решение:

В уравнениях этой системы коэффициенты при y являются противоположными числами.

Сложим почленно левые и правые части уравнений: $+\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = -2, \end{cases}$

$$5x = 5;\ x = 1.$$

Подставим $x = 1$ в первое уравнение: $2 \cdot 1 + y = 7$; $y = 5$.

Ответ: $(1;\ 5)$.

Пример 4. Решить систему уравнений способом сложения: $\begin{cases} 6x + 5y = -8, \\ 4x + 7y = 2. \end{cases}$

Решение:

Умножим обе части обоих уравнений на такие числа, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами, например, первое уравнение умножим почленно на 2, а второе — на -3:

$$\begin{cases} 6x + 5y = -8, \\ 4x + 7y = 2; \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot(-3) \end{matrix} \right. \quad +\begin{cases} 12x + 10y = -16, \\ -12x - 21y = -6, \end{cases}$$

$$-11y = -22;\ y = 2.$$

Подставим $y = 2$ в первое уравнение: $6x + 5 \cdot 2 = -8$; $6x = -8 - 10$; $x = -3$.

Ответ: $(-3;\ 2)$.

Решение систем линейных уравнений, содержащих переменную под знаком модуля

Пример 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} y - x = 1, \\ x + |y| = 1. \end{cases}$

Решение:

По определению модуля $|y| = \begin{cases} y, \text{ если } y \ge 0, \\ -y, \text{ если } y < 0. \end{cases}$

Поэтому имеем две системы уравнений:

а) $y \ge 0$; $+\begin{cases} y - x = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$

$2y = 2$; $y = 1$; $x = 0$. Это решение удовлетворяет условию $y \ge 0$.

б) $y < 0$; $+\begin{cases} y - x = 1, \\ x - y = 1; \end{cases}$

$0 = 2$; не имеет решения.

Ответ: $(0;\ 1)$.

Пример 6. Решить систему уравнений: $\begin{cases}|x-2|+|y-5|=1,\\ y-|x-2|=5.\end{cases}$

Решение:

По определению модуля:

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, \text{ если } x\ge 2,\\ -x+2, \text{ если } x<2\end{cases} \text{ и } |y-5|=\begin{cases}y-5, \text{ если } y\ge 5,\\ -y+5, \text{ если } y<5.\end{cases}$$

Имеем совокупность четырех систем уравнений:

а) $\begin{cases}x\ge 2,\\ y\ge 5;\end{cases}$ $\begin{cases}x-2+y-5=1,\\ y-x+2=5;\end{cases}$ $+\begin{cases}x+y=8,\\ -x+y=3,\end{cases}$ $\overline{2y=11;}$ $y=5{,}5;\ x=8-5{,}5=2{,}5.$

Полученное решение (2,5; 5,5) удовлетворяет условию $x\ge 2$, $y\ge 5$.

б) $\begin{cases}x\ge 2,\\ y<5;\end{cases}$ $\begin{cases}x-2-y+5=1,\\ y-x+2=5;\end{cases}$ $+\begin{cases}x-y=-2,\\ -x+y=3,\end{cases}$ $\overline{0=1;}$ решений нет.

в) $\begin{cases}x<2,\\ y\ge 5;\end{cases}$ $\begin{cases}-x+2+y-5=1,\\ y+x-2=5;\end{cases}$ $+\begin{cases}-x+y=4,\\ x+y=7,\end{cases}$ $\overline{2y=11;}$ $y=5{,}5;\ x=7-5{,}5=1{,}5.$

Полученное решение (1,5; 5,5) удовлетворяет условию $x<2$, $y\ge 5$.

г) $\begin{cases}x<2,\\ y<5;\end{cases}$ $\begin{cases}-x+2-y+5=1,\\ y+x-2=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=6,\\ x+y=7;\end{cases}$ система несовместна.

Ответ: (2,5; 5,5); (1,5; 5,5).

Исследование системы уравнений с двумя переменными (система линейных уравнений с параметрами)

Система двух линейных уравнений $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$

- имеет решение, если $\dfrac{a_1}{a_2}\ne\dfrac{b_1}{b_2}$;
- не имеет решения, если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\ne\dfrac{c_1}{c_2}$;
- имеет бесчисленное множество решений, если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$.

Используем эти соотношения для решения систем линейных уравнений с параметром.

Пример 7. Найти все значения параметра a, при которых система:

$$\begin{cases}(a+1)x-y=a,\\ (a-3)x+ay=9\end{cases}$$

а) имеет единственное решение (требуется его найти);
б) имеет бесчисленное множество решений;
в) решений не имеет.

Решение:

Система имеет единственное решение, если

$$\frac{a+1}{a-3} \neq \frac{-1}{a};\ a(a+1) \neq -a+3;\ a^2+2a-3 \neq 0;\ a \neq 1;\ a \neq -3.$$

Рассмотрим, сколько решений имеет система при $a = 1$ и $a = -3$.

Если $a = 1$, то система примет вид $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -2x + y = -9. \end{cases}$

Получим $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-9}$.

Система решений не имеет.

Если $a = -3$, система примет вид: $\begin{cases} -2x - y = -3, \\ -6x - 3x = -9; \end{cases}$ т. е. $\frac{-2}{-6} = \frac{-1}{-3} = \frac{-3}{-9}$.

Итак, при $a \neq 1$, $a \neq -3$ система имеет единственное решение, найдем его.

Из первого уравнения выразим y: $y = (a+1)x - a$; $y = ax + x - a$.

Подставим это значение во второе уравнение:

$$(a-3)x + a(ax + x - a) = -9;$$
$$ax - 3x + a^2x + ax - a^2 = -9;$$
$$a^2x + 2ax - 3 = a^2 - 9;$$
$$(a^2 + 2a - 3)x = a^2 - 9.$$

Разложим на множители многочлены относительно a в левой и правой части:

$$(a-1)(a+3)x = (a-3)(a+3),$$

но $a \neq 1$ и $a = -3$, коэффициент при x не равен нулю,

$$x = \frac{(a-3)(a+3)}{(a-1)(a+3)};\quad x = \frac{a-3}{a-1};$$

$$y = ax + x - a = \frac{a(a-3)}{a-1} + \frac{a-3}{a-1} - {}^{a-1/}a = \frac{a^2 - 3a + a - 1 - a^2 + a}{a-1} =$$
$$= \frac{-a-1}{a-1} = \frac{a+1}{1-a}.$$

Ответ: а) если $a \neq 1$; $a \neq -3$, система имеет единственное решение вида $\left(\frac{a-3}{a-1}; \frac{a+1}{1-a}\right)$; б) если $a = -3$, система имеет бесчисленное множество решений; в) если $a = 1$, система решений не имеет.

3.1.9. Уравнения и системы уравнений с несколькими переменными (уравнения в целых числах)

Уравнения с двумя и более переменными вида

$$f(x; y) = \varphi(x; y) \text{ (с двумя переменными)},$$
$$f(x; y; z) = \varphi(x; y; z) \text{ (с тремя переменными)},$$

где f и φ — выражения с этими переменными,
часто необходимо уметь решать в задачах с целочисленными значениями.

Пример 1. Учащиеся 9 класса собирали грибы, всего собрали 217 грибов, причем каждый собрал одинаковое количество. Сколько учеников приехало за грибами, если их было больше 10 человек?

Решение:

Пусть x учеников собрали каждый по y грибов, тогда $xy = 217$ или $x = \frac{217}{y}$.

Поскольку количество учащихся — это целое число, y — делитель числа 217. Число 217 имеет делители: 1, 7 и 31. Так как число учеников более 10, то их было 31.

Ответ: 31.

Рассмотрим еще несколько методов решения уравнений с двумя переменными в целых числах.

Пример 2. Найти целочисленные решения уравнения $2x^2 - xy - y^2 = 5$.

Решение:

Разложим левую часть на множители:

$$2x^2 - xy - y^2 = 2x^2 + xy - 2xy - y^2 = x(2x + y) - y(2x + y) = (x - y)(2x + y).$$

Получим уравнение $(x - y)(2x + y) = 5$.

Число 5 можно представить в виде произведения двух целых чисел, с учетом порядка, четырьмя способами:

$$5 = 1 \cdot 5;\ 5 = 5 \cdot 1;\ 5 = (-1) \cdot (-5) \text{ и } 5 = (-5) \cdot (-1).$$

Получим четыре системы:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x + y = 5; \end{cases} \begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \begin{cases} x - y = -1, \\ 2x + y = -5; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - y = -5, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

Все системы имеют целочисленные решения, соответственно:

$$(2;\ 1);\ (2;\ -3);\ (-2;\ -1);\ (-2;\ 3).$$

Пример 3. Решить уравнение в целых числах: $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

Решение:

Выразим y через x:

$$2x^2 - 2xy + 9x + y = 2;$$
$$y - 2xy = 2 - 2x^2 - 9x;$$
$$y(1 - 2x) = -2x^2 - 9x + 2;$$
$$y = \frac{2x^2 + 9x - 2}{2x - 1}.$$

Полученная дробь — неправильная, поскольку степень числителя больше степени знаменателя. Выделим целую часть:

$$\frac{2x^2 + 9x - 2}{2x - 1} = \frac{2x^2 - x + 10x - 5 + 3}{2x - 1} = \frac{2x^2 - x}{2x - 1} + \frac{10x - 5}{2x - 1} + \frac{3}{2x - 1} =$$
$$= \frac{x(2x - 1)}{2x - 1} + \frac{5(2x - 1)}{2x - 1} + \frac{3}{2x - 1} = x + 5 + \frac{3}{2x - 1};$$
$$\text{т. е. } y = x + 5 + \frac{3}{2x - 1}.$$

Поскольку x и y — целые числа, $\frac{3}{2x - 1}$ должно быть целым числом. Это возможно, если выражение $2x - 1$ является делителем числа 3, т. е. ± 1 и ± 3.

Получим:

$$2x - 1 = 1;\ x = 1;\ y = 1 + 5 + \frac{3}{2 \cdot 1 - 1} = 9;$$
$$2x - 1 = -1;\ x = 0;\ y = 0 + 5 + \frac{3}{0 - 1};\ y = 2;$$

$$2x - 1 = 3;\ x = 2;\ y = 2 + 5 + \frac{3}{2 \cdot 2 - 1};\ y = 8;$$

$$2x - 1 = -3;\ x = -1;\ y = -1 + 5 + \frac{3}{2 \cdot (-1) - 1};\ y = 3.$$

Ответ: (1; 9); (0; 2); (2; 8); (−1; 3).

Системы уравнений с тремя переменными

Рассмотрим способы решения системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Пример 4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} y + z = 3, \\ z + x = -5, \\ x + y = 4. \end{cases}$

Решение:

Систему этих линейных уравнений можно решать способом подстановки или способом сложения.

$$+\begin{cases} y + z = 3, \\ z + x = -5, \end{cases} \quad \text{но } x + y = 4 \text{ (третье уравнение системы),}$$

$$2z + x + y = -2,$$

тогда $2z + 4 = -2$; $z = -3$.

Подставим это значение в первое и второе уравнения:

$$y - 3 = 3;\ y = 6;$$

$$-3 + x = -5;\ x = -2.$$

Ответ: (−2; 6; −3).

Пример 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} xy = 27, \\ xz = 3, \\ yz = 4. \end{cases}$

Решение:

Перемножим соответствующие части всех трех уравнений:

$$xy \cdot xz \cdot yz = 27 \cdot 3 \cdot 4;\ x^2y^2z^2 = 324, \text{ тогда } (xyz)^2 = 324;\ xyz = \pm 18.$$

Разделим это уравнение на первое, второе и третье уравнения:

$$\frac{xyz}{xy} = \frac{\pm 18}{27};\ z = \pm\frac{2}{3};\ \frac{xyz}{xy} = \frac{\pm 18}{3};$$

$$y = \pm 6;\ \frac{xyz}{yz} = \frac{\pm 18}{4};\ x = \pm 4{,}5.$$

Заметим, что каждая тройка решений должна содержать числа одного знака, поскольку попарные произведения этих значений положительны.

Ответ: $\left(4{,}5;\ 6;\ \frac{2}{3}\right)$ и $\left(-4{,}5;\ -6;\ -\frac{2}{3}\right)$.

3.1.10. Решение простейших нелинейных систем уравнений с двумя переменными

Нелинейные системы уравнений так же, как и линейные, решаются способом подстановки и алгебраического сложения. Кроме этого применяются метод замены переменной, почленное умножение и деление уравнений.

Способ подстановки

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x(y+1)=16, \\ \dfrac{x}{y+1}=4. \end{cases}$

Решение:

Заметим, что при $y=-1$ система решений не имеет.

Выразим x из второго уравнения: $x=4(y+1)$, подставим это выражение в первое уравнение:

$$4(y+1)(y+1)=16;\ (y+1)^2=4.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$y+1=2;\ y_1=1;\ x_1=4(y+1)=4\cdot(1+1)=8;$$

$$\text{и } y+1=-2;\ y_2=-3;\ x_2=4(y+1)=4\cdot(-3+1)=-8.$$

Ответ: (8; 1) и (−8; −3).

Пример 2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3-y^3=124, \\ x^2+xy+y^2=31. \end{cases}$

Решение:

Применим к первому уравнению формулу разности кубов:

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=124$, но из второго уравнения: $x^2+xy+y^2=31$.

Подставим это значение в первое уравнение:

$$(y+4)^2+y(y+4)+y^2=31;$$

$$y^2+8y+16+y^2+4y+y^2-31=0;$$

$$3y^2+12y-15=0;$$

$$y^2+4y-5=0;$$

$$y_1=1;\ x_1=y+4=1+4=5;\ y_2=-5;\ x_2=y+4=-5+4=-1.$$

Ответ: (5; 1) и (−1; −5).

Метод алгебраического сложения

Пример 3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 7-x+y-xy=0, \\ 5-y+x-xy=0. \end{cases}$

Решение:

Сложим и вычтем почленно уравнения:

$$+\begin{cases} 7-x+y-xy=0, \\ 5-y+x-xy=0; \end{cases} \qquad -\begin{cases} 7-x+y-xy=0, \\ 5-y+x-xy=0; \end{cases}$$

$$12-2xy=0; \qquad 2-2x+2y=0;$$

$$xy=6; \qquad x-y=1.$$

Получим равносильную систему уравнений: $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=6. \end{cases}$

Выразим из первого уравнения $x=y+1$, подставим во второе уравнение:

$$y(y+1)=6;\ y^2+y-6=0;\ y_1=-3;\ y_2=2;$$

$$x_1=y_1+1=-3+1=-2;\ x_2=y_2+1=2+1=3.$$

Ответ: (−2; −3); (3; 2).

Пример 4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2+2y+1=0, \\ y^2+2x+1=0. \end{cases}$

Решение:

Сложим почленно уравнения, получим:

$$x^2 + 2y + 1 + y^2 + 2x + 1 = 0;$$
$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 0;$$
$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0.$$

Сумма квадратов двух выражений равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю:

$$(x + 1)^2 = 0 \text{ и } (y + 1)^2 = 0.$$

Значит, $x = -1$ и $y = -1$.

Ответ: $(-1; -1)$.

Метод почленного умножения и деления систем уравнений

Пример 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^5y^7 = 32, \\ x^7y^5 = 128. \end{cases}$

Решение:

Почленно умножим и разделим уравнения ($x \neq 0$, $y \neq 0$):

$$\begin{cases} x^5y^7 \cdot x^7y^5 = 32 \cdot 128, \\ \dfrac{x^5y^7}{x^7y^5} = \dfrac{32}{128}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^{12}y^{12} = 2^5 \cdot 2^7, \\ \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} (xy)^{12} = 2^{12}, \\ \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = \pm 2, \\ \dfrac{y}{x} = \pm\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Из данной системы получим совокупность четырех систем уравнений. Учтем, что x и y одного знака. Тогда: $\begin{cases} xy = 2, \\ x = 2y; \end{cases}$ $2y^2 = 2$; $y = \pm 1$; $x = \pm 2$.

Ответ: $(2; 1)$ и $(-2; -1)$.

Метод замены переменной

Метод замены переменной — наиболее универсальный метод, который применяется для решения различных систем уравнений.

Пример 6. Решить систему уравнений методом замены переменной:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2x + y} + \dfrac{1}{2x - y} = \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{7}{2x + y} + \dfrac{2}{2x - y} = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Решение:

Сделаем замену переменной: $\begin{cases} \dfrac{1}{2x + y} = t, \\ \dfrac{1}{2x - y} = z. \end{cases}$

Получим систему:

$$\begin{cases} 3t + z = \dfrac{2}{5}, \\ 7t + 2z = \dfrac{3}{5}; \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 5 \\ \cdot 5 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 15t + 5z = 2, \\ 35t + 10z = 3; \end{cases} \Big| \cdot (-2) \quad + \begin{cases} -30t - 10z = -4, \\ 35t + 10z = 3, \end{cases}$$

$$5t = -1; \; t = -\frac{1}{5}.$$

Подставим $t=-\dfrac{1}{5}$ в первое уравнение: $-\dfrac{3}{5}+z=\dfrac{2}{5}$; $z=1$.

Вернемся к начальным переменным: $\begin{cases}\dfrac{1}{2x+y}=-\dfrac{1}{5},\\ \dfrac{1}{2x-y}=1.\end{cases}$

Сложим почленно: $+\begin{cases}2x+y=-5,\\ 2x-y=1,\end{cases}$ (При условии, что $2x\neq\pm y$.)

$4x=-4$; $x=-1$.

Подставим значение x в первое уравнение: $-2+y=-5$; $y=-3$.

Ответ: $(-1; -3)$.

Методом замены переменной можно пользоваться и тогда, когда замену целесообразно сделать сначала только в одном из уравнений.

Используем этот метод для решения систем иррациональных уравнений.

Пример 7. Решить систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{26}{5},\\ xy-6x-6y=6.\end{cases}$

Решение:

Сделаем замену переменной только в первом уравнении и решим это уравнение:

$$\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=t,\ t\geq 0,\ x\neq\pm y.$$

$$t+\frac{1}{t}=\frac{26}{5};\ 5t^2-26t+5=0;\ t_1=5,\ t_2=\frac{1}{5},\ \text{оба корня положительны.}$$

а) $t=5$; $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=5$; $\dfrac{x-y}{x+y}=25$; $x-y=25x+25y$.

Получим систему: $\begin{cases}12x=-13y,\\ xy-6x-6y=6;\end{cases}\Bigg|\cdot 12$ $12xy-12\cdot 6x-12\cdot 6y=6$.

Подставим вместо $12x$ выражение $-13y$.

$-13y\cdot y-(-13y)\cdot 6-72y=72$;

$13y^2-6y+72=0$; корней нет.

б) $t=\dfrac{1}{5}$; $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{25}$; $25x-25y=x+y$; $12x=13y$.

Получим систему уравнений:

$\begin{cases}12x=13y,\\ xy-6x-6y=6;\end{cases}\Bigg|\cdot 12$ $12x\cdot y-12x\cdot 6-72y=72$;

$13y\cdot y-13y\cdot 6-72y-72=0$; $13y^2-150y-72=0$;

$y_1=12$; $x_1=\dfrac{13}{12}y=13$; $y_2=-\dfrac{6}{13}$; $x_1=\dfrac{13}{12}y=-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $(13; 12)$; $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{6}{13}\right)$.

Если в системе уравнений замена x на y и y на x приводит к той же системе, то такие системы называются **симметрическими**. Их решают методом замены переменной вида:

$$\begin{cases} x + y = t, \\ xy = z. \end{cases}$$

Пример 8. Решить симметрическую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 3xy + y = 9, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем систему следующим образом:

$$\begin{cases} (x + y) + 3xy = 9, \\ x^2 + 2xy + y^2 - 2xy + xy = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y) + 3xy = 9, \\ (x + y)^2 - xy = 7. \end{cases}$$

Сделаем замену переменной: $\begin{cases} x + y = t, \\ xy = z; \end{cases}$ получим:

$$\left.\begin{cases} t + 3z = 9, \\ t^2 - z = 7; \end{cases}\right| \cdot 3 \qquad + \begin{cases} t + 3z = 9, \\ 3t^2 - 3z = 21, \end{cases}$$
$$3t^2 + t = 30;$$

$$3t^2 + t - 30 = 0;$$

$$t_1 = -\frac{10}{3}; \ \ z_1 = 3 - \frac{t}{3} = 3 + \frac{10}{9} = 4\frac{1}{9}; \ \ t_2 = 3; \ \ z_2 = 3 - \frac{t}{3} = 2.$$

Получим совокупность систем:

$\begin{cases} x + y = -\dfrac{10}{3}, \\ xy = 4\dfrac{1}{9}. \end{cases}$ Система решений не имеет.

$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$ Система имеет решения (2; 1) и (1; 2).

Ответ: (2; 1) и (1; 2).

Уравнение называется **однородным**, если все члены уравнения — одночлены одной и той же степени, а правая часть уравнения равна нулю.

Например, $2x - y = 0$ — однородное уравнение первой степени;

$3x^2 + 2xy - y^2 = 0$ — однородное уравнение второй степени.

Системы однородных уравнений и сводящиеся к ним решаются методом почленного деления и замены переменной.

Пример 9. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

Решение:

Очевидно, что первое уравнение системы — однородное уравнение второй степени. Разделим его почленно на y^2 (это возможно, поскольку пара $x = 0$, $y = 0$ не является решением системы).

$$\frac{x^2}{y^2}-\frac{3xy}{y^2}+\frac{2y^2}{y^2}=0;\ \left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)+2=0.$$

Замена: $\frac{x}{y}=t$, тогда $t^2-3t+2=0$; $t_1=2$; $t_2=1$, т. е. $\frac{x}{y}=2$ или $\frac{x}{y}=1$.

Получим совокупность систем:

1) $\begin{cases}\frac{x}{y}=2,\\ x^2+y^2=20;\end{cases}$ $x=2y$; $(2y)^2+y^2=20$; $5y^2=20$; $y=\pm2$, $x=\pm4$; $(4; 2)$ и $(-4; -2)$;

2) $\begin{cases}\frac{x}{y}=1,\\ x^2+y^2=20;\end{cases}$ $x=y$; $x^2+x^2=20$; $2x^2=20$; $x^2=10$; $x=\pm\sqrt{10}$, $y=\pm\sqrt{10}$; $\left(\sqrt{10}; \sqrt{10}\right)$ и $\left(-\sqrt{10}; -\sqrt{10}\right)$.

Ответ: $(4; 2)$; $(-4; -2)$; $\left(\sqrt{10}; \sqrt{10}\right)$; $\left(-\sqrt{10}; -\sqrt{10}\right)$.

Пример 10. Решить систему уравнений: $\begin{cases}x^2-2|x|y+y^2=4,\\ x^2-3|x|y-y^2=3.\end{cases}$

Решение:

По определению модуля: $|x|=\begin{cases}x,\ x\ge0,\\ -x,\ x<0.\end{cases}$

Рассмотрим два случая:

а) $x\ge0$. Получим систему: $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=4,\\ x^2-3xy-y^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-y)^2=4,\\ x^2-3xy-y^2=3.\end{cases}$

Получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases}x-y=2,\\ x^2-3xy-y^2=3;\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x-y=-2,\\ x^2-3xy-y^2=3.\end{cases}$$

Решим их способом подстановки:

1) $\begin{cases}x=y+2,\\ (y+2)^2-3y(y+2)-y^2=3;\end{cases}$ $y^2+4y+4-3y^2-6y-y^2-3=0$; $3y^2+2y-1=0$;

$y_1=1$; $x_1=y+2=3$; $y_2=-\frac{1}{3}$; $x_2=y+2=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}$; x_1 и x_2 удовлетворяют условию $x\ge0$;

2) $\begin{cases}x=y-2,\\ (y-2)^2-3y(y-2)-y^2=3;\end{cases}$ $y^2-4y+4-3y^2+6y-y^2-3=0$; $3y^2-2y-1=0$;

$y_3=-1$; $x_3=y-2=-3$; $y_4=\frac{1}{3}$; $x_4=y-2=\frac{1}{3}-2=-1\frac{2}{3}$; корни x_3 и x_4 не удовлетворяют условию $x\ge0$;

б) $x<0$, тогда система примет вид: $\begin{cases}x^2+2xy+y^2=4,\\ x^2+3xy-y^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+y)^2=4,\\ x^2+3xy-y^2=3.\end{cases}$

Имеем совокупность двух систем: $\begin{cases}x+y=2,\\ x^2+3xy-y^2=3;\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y=-2,\\ x^2+3xy-y^2=3.\end{cases}$

Решим их способом подстановки:

1) $x = 2 - y$; $(2 - y)^2 + 3y(2 - y) - y^2 = 3$; $3y^2 - 2y - 1 = 0$; $y_5 = -1$; $x_5 = 2 - y = 3$; $y_6 = \frac{1}{3}$; $x_6 = 2 - y = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$; корни x_5 и x_6 не удовлетворяют условию $x < 0$.

2) $x = -y - 2$; $(-y - 2)^2 + 3y(-y - 2) - y^2 - 3 = 0$; $3y^2 + 2y - 1 = 0$; $y_7 = 1$; $x_7 = -y - 2 = -3$; $y_8 = -\frac{1}{3}$; $x_8 = -y - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -1\frac{2}{3}$; x_7 и x_8 не удовлетворяют условию $x < 0$.

Ответ: (3; 1); $\left(1\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; (−3; −1) и $\left(-1\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Исследование нелинейных систем уравнений (системы уравнений с параметром)

Пример 11. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 2 - a, \\ 2xy = 4 + a^2 \end{cases}$, где a — параметр.

Решение:

Исключим параметр a из данной системы.

Из первого уравнения имеем: $a = 2 - x - y$.

Подставим значение a во второе уравнение: $2xy = 4 + (2 - x - y)^2$.

Воспользуемся формулой: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

$$(2 - x - y)^2 = 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$2xy = 4 + 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy \text{ или } x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0,$$

т. е. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0$.

Сумма квадратов выражений равна нулю, если каждое из выражений равно нулю, т. е. $x = 2$, $y = 2$.

Подставим эти значения в первое уравнение:

$$2 + 2 = 2 - a, \text{ т. е. } a = -2.$$

Ответ: система имеет единственное решение при $a = 2$, это решение (2; 2).

Пример 12. Решить систему уравнений: $\begin{cases} ax^2 - 2xy + a = 0, \\ x^2 - 2ax + y^2 = 0. \end{cases}$ где a — параметр.

Решение:

Оба уравнения системы являются квадратными относительно переменной x при условии, что $a \neq 0$.

Дискриминант первого уравнения: $\frac{D_1}{4} = y^2 - a^2$.

Дискриминант второго уравнения: $\frac{D_2}{4} = a^2 - y^2$.

Так как система имеет решение при одновременном выполнении равенств $D_1 \geq 0$ и $D_2 \geq 0$, то приходим к соотношению $y^2 - a^2 = 0$ или $y^2 = a^2$.

Второе уравнение системы приобретает вид:

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \text{ или } (x - a)^2 = 0, \ x = a.$$

Рассмотрим ситуации:

а) $y = a$.

Первое уравнение системы $ax^2 - 2ax + a = 0$

$a(x - 1)^2 = 0$;

$a \neq 0$, тогда $x = 1$, отсюда $a = 1$ и $y = 1$;

б) $y = -a$.

$ax^2 + 2ax + a = 0$ или $a(x + 1)^2 = 0$, $a \neq 0$, тогда $x = -1$, $a = -1$, $y = 1$.

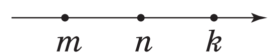
Рассмотрим отдельно случай $a = 0$.

Система примет вид: $\begin{cases} xy = 0, \\ x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$ т. е. $x = 0$, $y = 0$.

Ответ: а) если $a = 0$, то $x = 0$, $y = 0$; б) если $a = 1$, то $x = 1$, $y = 1$; в) если $a = -1$, то $x = 1$, $y = -1$; г) если $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, решений нет.

3.2. Неравенства

3.2.1. Числовые неравенства и их свойства

Определение	Примеры
Если a больше b, то записывают: $a > b$. Если a меньше b, то записывают: $a < b$. Выражения $a > b$ и $a < b$ называются **неравенствами**	$10 > 2$; $-5 < 0$; $-7 < -5$; $-100 < 0{,}001$ $3 > 0$;
Число a больше числа b, если $a - b > 0$: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ Число a меньше числа b, если $a - b < 0$: $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ Число a равно числу b, если $a - b = 0$: $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$	«$\Leftrightarrow$» — знак равносильности. Если $a - b = 3$, то $a > b$; Если $a - b = -0{,}1$, то $a < b$; Если $a - b = 0$, то $a = b$
На координатной прямой **большее** число изображается точкой, которая расположена **справа** от меньшего числа, а **меньшее** число — точкой, которая расположена **слева** от большего числа	 $a < b$  $m < n < k$
Знаки $>$ и $<$ — знаки строгих неравенств	$a < b$, $m > k$ (a меньше b; m больше k)
Знаки $\geq$ и $\leq$ — знаки нестрогих неравенств	$p \leq n$ (p меньше или равно n или p — не больше n); $a \geq m$ (a больше или равно m, a не меньше m)
$a > b$, $m > n$ — неравенства одного знака (или $a < b$, $m < n$)	$3 > 2$ и $-7 > -10$; $2 < 7$ и $-3 < 1$ — неравенства одного знака
$a > b$, $m < k$ или $a < b$, $m > k$ — неравенства противоположных знаков	$2{,}3 < 5$ и $-1 > -10$; $5 > -3$ и $-2 < 0$ — неравенства противоположных знаков

С помощью определения неравенства можно **доказывать неравенства.**

Пример 1. Доказать, что при любых значениях a неравенство верно:

$$(a + 7)(a + 1) < (a + 2)(a + 6).$$

Доказательство:

Найдем разность правой и левой частей неравенства:

$$(a + 2)(a + 6) - (a + 7)(a + 1) = a^2 + 6a + 2a + 12 - a^2 - a - 7a - 7 = 5 > 0.$$

Это значит, что правая часть неравенства при любых a больше левой части, что и требовалось доказать.

Этим методом доказываются так называемые **опорные неравенства**.

Пример 2. Доказать, что сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше двух: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, где $a > 0$, $b > 0$.

Доказательство:

Найдем разность правой и левой частей неравенства:

$$\frac{{}^{a/}a}{b} + \frac{{}^{b/}b}{a} - {}^{ab/}2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab} \geq 0,$$

поскольку $(a - b)^2 \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$. Равенство достигается, если $a = b$.

Аналогично доказывается, что среднее арифметическое двух чисел $\left(\frac{a+b}{2}\right)$, среднее геометрическое $\left(\sqrt{ab}\right)$ и среднее гармоническое положительных чисел $\left(\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right)$ связаны соотношением: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $a > 0$, $b > 0$.

С помощью опорных неравенств, в свою очередь, можно доказывать ряд неравенств.

Пример 3. Доказать неравенство: $(a + b)(ab + 1) \geq 4ab$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Доказательство:

Используем опорные неравенства: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Запишем верные неравенства: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ и $\frac{ab+1}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Почленно перемножим эти неравенства, получим:

$$\frac{(a+b)(ab+1)}{4} \geq ab \text{ или } (a + b)(ab + 1) \geq 4ab,$$

что и требовалось доказать.

Основные свойства числовых неравенств

Свойства	Примеры
Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$	Если $10 > 2$, то $2 < 10$; если $-7 < -1$, то $-1 > -7$
Свойство транзитивности: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$	Если $10 > 1$ и $1 > -4$, то $10 > -4$
Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получим верное неравенство: если $a > b$, то $a + c > b + c$	Если $20 > 3$, то $20 + 1 > 3 + 1$, т. е. $21 > 4$ и $20 - 4 > 3 - 4$, т. е. $16 > -1$

Окончание таблицы

Свойства	Примеры
Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство: если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$	Если $7 > -3{,}1$ и $5 > 0$, то $7 \cdot 5 > -3{,}1 \cdot 5$, т. е. $35 > -15{,}5$
Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и знак неравенства изменить на противоположный, то получим верное неравенство: если $a > b$; $c < 0$, то $ac < bc$ или $a < b$; $c < 0$, то $ac > bc$	Если $10 > 2$ и $-2 < 0$, то $-2 \cdot 10 < 2 \cdot (-2)$, $-20 < -4$
Если почленно сложить два верных неравенства одного знака, то получим верное неравенство: $$+\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$	$$+\begin{array}{c} -7 < 3 \\ 10 < 13 \\ \hline 3 < 26 \end{array}$$
Если a, b, c и d — положительные числа, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$, т. е. если почленно перемножить верные неравенства одного знака, все члены которых — положительные числа, то получим верное неравенство	$$\times\begin{array}{c} 20 > 4 \\ \frac{2}{5} > \frac{1}{5} \\ \hline 20 \cdot \frac{2}{5} > 4 \cdot \frac{1}{5} \\ 8 > 0{,}8 \end{array}$$
Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$	Если $20 > 3$ и $4 < 10$, то $20 - 4 > 3 - 10$, $16 > -6$
Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	Если $7 > 3$, то $\frac{1}{7} < \frac{1}{3}$
Если $a > b > 0$, то для любого натурального числа n верно неравенство $a^n > b^n$	Если $5 > 2$, $n = 6$, то $5^6 > 2^6$

Пример 4. Известно, что $-3 < a < 7$. Оценить:

а) $2a + 7$; б) $3a - 1$; в) $4 - 2a$; г) $\dfrac{1-3a}{4}$.

Решение:

а) $-3 < a < 7$, тогда $-6 < 2a < 14$ и $-6 + 7 < 2a + 7 < 14 + 7$, т. е. $1 < 2a + 7 < 21$;

б) $-3 < a < 7$, тогда $-9 < 3a < 21$, то $-10 < 3a - 1 < 20$;

в) $-3 < a < 7$. Умножим почленно двойное числовое неравенство на -2, получим:

$$-3 \cdot (-2) > -2a > 7 \cdot (-2) \text{ или } -14 < -2a < 6.$$

Тогда $4 - 14 < 4 - 2a < 4 + 6$, т. е. $-10 < 4 - 2a < 10$;

г) $-3 < a < 7$, тогда $-3 \cdot 7 < -3a < -3 \cdot (-3)$; $-21 < -3a < 9$; $1 - 21 < 1 - 3a < 1 + 9$;

$-20 < 1 - 3a < 10$. Получим $-\dfrac{20}{4} < \dfrac{1-3a}{4} < \dfrac{10}{4}$; $-5 < \dfrac{1-3a}{4} < 2{,}5$.

Пример 5. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин больше полупериметра этого треугольника.

Решение:

Пусть x, y и z — расстояния от внутренней точки M до вершин треугольника. Из получившихся трех треугольников AMB, BMC и AMC по теореме о неравенстве треугольников (сумма двух любых сторон треугольника больше третьей стороны) имеем:

$$+\begin{array}{l} x+y>c \\ x+z>b \\ z+y>a \\ \hline 2x+2y+2z>a+b+c; \end{array}$$

т. е. $x+y+z>\dfrac{a+b+c}{2}$.

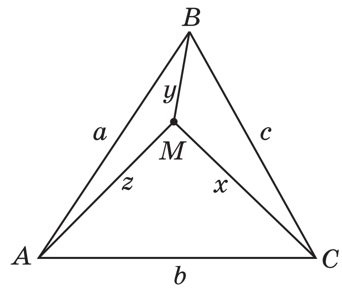


Рис. 3.4

3.2.2. Неравенство (линейное) с одной переменной. Решение неравенства

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax+b>0$ (или $ax+b<0$), где a и b — некоторые числа, x — переменная. К линейным относятся также нестрогие неравенства вида $ax+b\geq 0$ (или $ax+b\leq 0$).

Решением линейного неравенства с одной переменной называется такое число, при подстановке которого вместо переменной неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, значение $x = 1$ является решением неравенства $5x - 4 > 0$, поскольку $5 \cdot 1 - 4 > 0$, т. е. $1 > 0$ — верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Равносильными называют неравенства, имеющие одинаковые решения. Неравенства, не имеющие решений, также называются равносильными.

Например, неравенства $4x - 8 > 0$ и $3x - 6 > 0$ равносильны.

При решении неравенств используют **следующие свойства**:

Свойства	Примеры
Если из одной части неравенства **перенести** в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство	$5(x-1)+3\geq 1-3(x+2)$ $5x-5+3\geq 1-3x-6$ $5x+3x\geq 5-3+1-6$ $8x\geq -3$
Если обе части неравенства **умножить** или **разделить** на одно и то же **положительное** число, то получится равносильное ему неравенство	а) $3x\geq 12 \mid :3;\ x\geq 4$; б) $\frac{1}{7}x<4 \,\Big\vert\, \cdot 7;\ x<28$
Если обе части неравенства **умножить** или **разделить** на одно и то же **отрицательное** число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство	а) $-4x<3 \mid :(-4);\ x>-\frac{3}{4}$; б) $-\frac{3}{5}\geq 9 \,\Big\vert\, \cdot\left(-\frac{5}{3}\right);\ x\leq -15$

Рассмотрим примеры решений линейных неравенств и способы изображения множества решений этих неравенств.

Пример 1. Решить неравенство: $-x + 3(-7 + 5x) > 7x + 7$.

Решение:

Упростим левую и правую части неравенства: раскроем скобки и перенесем члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, — в правую:

$$-x - 21 + 15x > 7x + 7;$$
$$-x + 15x - 7x > 7 + 21;$$
$$7x > 28.$$

После приведения подобных слагаемых разделим обе части неравенства на 7. Получим $x > 4$.

Множество чисел, удовлетворяющих этому неравенству, на числовой оси изображается **открытым лучом** (рис. 3.5).

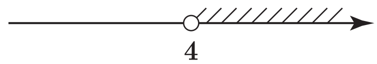


Рис. 3.5

Число 4 не принадлежит этому лучу, на рисунке изображается пустой точкой, луч отмечен штриховкой.

Кроме того, множество решений неравенства записывают в виде $x \in (4; +\infty)$. Читают: «x принадлежит открытому числовому лучу от 4 до бесконечности» ($+\infty$ — знак, обозначающий бесконечно большие положительные числа).

Аналогично множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < -3$, изображается **открытым лучом**, и множество решений записывают в виде $(-\infty; -3)$ (рис. 3.6).

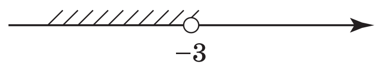


Рис. 3.6

Число −3 не принадлежит этому лучу, поэтому оно изображено пустой точкой на числовой оси и в записи возле него ставится круглая скобка (знак «$-\infty$» читается «минус бесконечность» и означает бесконечно большие отрицательные числа).

В свою очередь множество чисел, удовлетворяющих, например, неравенству $x \geq 5$, изображают на числовой прямой и называют **лучом**, пишут: $x \in [5; +\infty)$ (рис. 3.7).

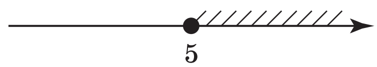


Рис. 3.7

Читают: «x принадлежит лучу от пяти до плюс бесконечности». Число 5 принадлежит этому лучу, поэтому на числовой прямой оно отмечено закрашенной точкой. В записи возле него стоит квадратная скобка.

Аналогично изображается решение неравенства, например $x \leq 1$ (рис. 3.8). $x \in (-\infty; 1]$.

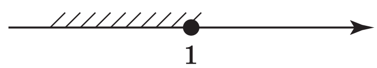


Рис. 3.8

Пример 2. Найти наименьшее число, являющееся решением неравенства:
а) $4(x - 1) < 2 + 7x$; б) $6y + 1 \geq 2(y - 1) - 3y$.

Решение:

а) $4(x - 1) < 2 + 7x$; $4x - 4 < 2 + 7x$;
$4x - 7x < 2 + 4$; $-3x < 6$; $x > -2$ (рис. 3.9).

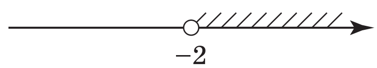


Рис. 3.9

Луч $(-2; +\infty)$ — открытый, и число −2 не входит в множество решений этого неравенства. Поэтому наименьшее целое число, являющееся решением неравенства, — это число −1.

б) $6y + 1 \geq 2(y - 1) + 3y$; $6y + 1 \geq 2y - 2 + 3y$;
$6y - 2y - 3y \geq -2 - 1$; $y \geq -3$ (рис. 3.10).

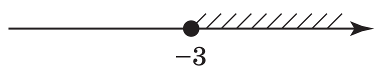


Рис. 3.10

Луч $[-3; +\infty)$ содержит число −3, поэтому наименьшим числом, являющимся решением этого неравенства, будет число −3.

Ответ: а) −1; б) −3.

Пример 3. Найти наибольшее целое число, являющееся решением неравенства: а) $-3x - 6 \geq 7x + 4$; б) $6x + 1 < 0$.

Решение:

а) $-3x + 6 \geq 7x + 4$; $-3x - 7x \geq 6 + 4$;
$-10x \geq 10$; $x \leq -1$ (рис. 3.11).

Луч $(-\infty; -1]$ содержит число -1, поэтому наибольшим целым числом, являющимся решением данного неравенства, будет число -1.

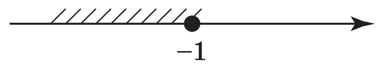


Рис. 3.11

б) $6x + 1 < 0$; $6x < -1$; $x < -\dfrac{1}{6}$ (рис. 3.12).

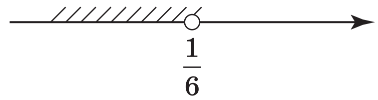


Рис. 3.12

Наибольшим целым числом, являющимся решением данного неравенства, будет число -1.

Ответ: а) -1; б) -1.

3.2.3. Линейные неравенства с одной переменной и сводящиеся к ним

Основные свойства линейных неравенств рассмотрены в предыдущем пункте. Рассмотрим более сложные неравенства, задачи на составление неравенств и линейные неравенства с параметрами.

Линейные неравенства могут не иметь решений или иметь бесчисленное множество решений.

Пример 1. Решить неравенства:

а) $\dfrac{3x+6}{4} - \dfrac{x}{4} > \dfrac{x+2}{2}$; б) $2 - \dfrac{x-4}{3} \leq 2x - \dfrac{7x-4}{3}$.

Решение:

а) Домножим все члены неравенства на общий знаменатель этих дробей, т. е. число $4 > 0$. Знак неравенства не изменится.

$\dfrac{3x+6}{4} \cdot 4 - \dfrac{x}{4} \cdot 4 > \dfrac{x+2}{2} \cdot 4$; $3+ 6 - x > 2x + 4$; $3x - x - 2x > 4 - 6$; $0 > -2$.

Получили верное числовое неравенство, значит, при любых значениях x неравенство верно.

б) Домножим все члены неравенства на $3 > 0$.

$$2 \cdot 3 - \frac{x-4}{3} \cdot 3 \leq 2x \cdot 3 - \frac{7x-4}{3} \cdot 3;$$

$$6 - (x - 4) \leq 6x - (7x - 4); \; 6 - x + 4 \leq 6x - 7x + 4;$$
$$-x - 6x + 7x \leq -6 - 4 + 4; \; 0 \leq -6.$$

Получили неверное числовое неравенство, т. е. при любых значениях x верного числового неравенства получить не сможем.

Ответ: а) x — любое число; б) решений нет.

Пример 2. Решим задачу на составление неравенства.

Из двух пунктов, находящихся на расстоянии 30 км, отправляются одновременно навстречу друг другу велосипедист и пешеход. Скорость движения велосипедиста 12 км/ч. С какой скоростью должен двигаться пешеход, чтобы его встреча с велосипедистом произошла не позже чем через 2 ч после начала движения?

Решение:

Пусть скорость движения пешехода x км/ч, скорость движения велосипедиста — 12 км/ч, тогда скорость их сближения будет $(x + 12)$ км/ч, значит, встретятся они через $\dfrac{30}{x+12}$ ч. По условию они должны встретиться не позднее чем через 2 ч после начала движения, т. е. время $\dfrac{30}{x+12}$ должно быть не больше 2 ч. Получим неравенство: $\dfrac{30}{x+12} \le 2$.

Все числа по условию положительны, поэтому умножение обеих частей неравенства на $x + 12$ приведет к равносильному неравенству: $30 \le 2(x + 12)$ или $2(x + 12) \ge 30$; $x + 12 \ge 15$; $x \ge 3$.

Ответ: скорость пешехода должна быть не меньше 3 км/ч.

Пример 3. При каких значениях x значение дроби $\dfrac{3-2x}{3}$ больше дроби $\dfrac{3-2x}{6}$ на $1 - x$?

Решение:

Очевидно, что ответ на вопрос сводится к решению неравенства вида:

$$\frac{3-2x}{3} - \frac{3-2x}{6} > 1 - x;\ \ 6\cdot\frac{3-2x}{3} - 6\cdot\frac{3-2x}{6} > 6\cdot(1-x);$$

$$2(3 - 2x) - (3 - 2x) > 6 - 6x;\ 6 - 4x - 3 + 2x > 6 - 6x;$$

$$6x - 4x + 2x > 6 - 6 + 3;\ 4x > 3;\ x > \frac{3}{4}.$$

Ответ: при $x > \dfrac{3}{4}$.

Пример 4. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{2(3x-1) - 7x + 2}$; б) $y = \dfrac{2}{\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)\sqrt{3} - 2x + 1}}$.

Решение:

а) Функция вида $y = \sqrt{f(x)}$ определена на множестве, где $f(x) \ge 0$, это множество и называют областью определения данной функции. Таким образом, необходимо решить неравенство:

$$2(3x - 1) - 7x + 2 \ge 0;$$
$$6x - 2 - 7x + 2 \ge 0;$$
$$-x \ge 0;$$
$$x \le 0.$$

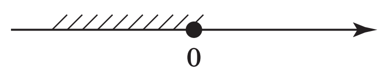


Рис. 3.13

б) Функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ определена на множестве $f(x) > 0$. Решим неравенство:

$$\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3} - 2x + 1 > 0;\ \ x\sqrt{3} - 3 - 2x + 1 > 0;\ \ x\left(\sqrt{3}-2\right) > 2.$$

$$x < \frac{2}{\sqrt{3}-2} = \frac{-2}{2-\sqrt{3}}\ \ \left(\text{число } \sqrt{3} - 2 < 0\right).$$

Ответ: а) функция определена для всех $x \in (-\infty;\ 0]$; б) функция определена для всех $x < \dfrac{-2}{2-\sqrt{3}}$.

Пример 5. Решить неравенство: а) $\dfrac{3}{2x-1} > 0$; б) $\dfrac{-4}{3x-7} \le 0$.

Решение:

а) Дробь положительна, если ее числитель и знаменатель одного знака, поскольку $3 > 0$, то $2x - 1 > 0$; $x > \dfrac{1}{2}$.

б) Дробь неположительна, если ее числитель и знаменатель имеют разные знаки, $-4 < 0$, тогда $3x - 7 > 0$; $3x > 7$; $x > \dfrac{7}{3}$; $x > 2\dfrac{1}{3}$.

Пример 6. Найти все значения a, при которых квадратное уравнение $(2a - 1)x^2 + 2x - 1 = 0$ имеет два действительных и различных корня.

Решение:

Квадратное уравнение имеет два действительных различных корня, если первый коэффициент не равен нулю и дискриминант этого уравнения положителен.

1) $2a - 1 \ne 0$; $a \ne \dfrac{1}{2}$.

2) Составим дискриминант:

$$D = 4 - 4(2a - 1) \cdot (-1) = 4 + 4(2a - 1) = 4 + 8a - 4 = 8a.$$

$8a > 0$ при $a > 0$ (рис. 3.14).

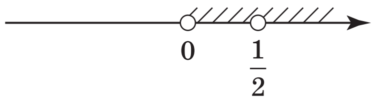


Рис. 3.14

Ответ: уравнение имеет два различных действительных корня при $0 < a < \dfrac{1}{2}$ или $a > \dfrac{1}{2}$.

Линейное неравенство с параметром

Рассмотрим схему решения неравенства вида $ax > b$ при различных значениях a и b.

$a > 0$	$a < 0$	$a = 0, b \ge 0$	$a = 0, b < 0$
$x > \dfrac{b}{a}$	$x < \dfrac{b}{a}$	решений нет	x — любое число

Пример 7. Решить неравенство: а) $(a - 3)x < 8$; б) $5x - a > ax - 3$.

Решение:

а) Рассмотрим случаи:

1) $a = 3$, тогда $0 \cdot x < 8$, $0 < 8$ — верное числовое неравенство, x — любое число.

2) $a > 3$, $x < \dfrac{8}{a-3}$;

3) $a < 3$, $x > \dfrac{8}{a-3}$.

б) $5x - a > ax - 3$; $5x - ax > a - 3$; $x(5 - a) > a - 3$.

Рассмотрим случаи:

1) $a = 5$, тогда $x \cdot 0 > 5 - 3$; $0 > 2$, решений нет;

2) $a > 5$, тогда $5 - a < 0$ и $x < \dfrac{a-3}{5-a}$;

3) $a < 5$, тогда $5 - a > 0$ и $x > \dfrac{a-3}{5-a}$.

Ответ: 1) а) x — любое число при $a = 3$; б) $x < \dfrac{8}{a-3}$ при $a > 3$; в) $x > \dfrac{8}{a-3}$ при $a < 3$; 2) а) решений нет при $a = 5$; б) $x < \dfrac{a-3}{5-a}$ при $a > 5$; в) $x > \dfrac{a-3}{5-a}$ при $a < 5$.

Пример 8. В зависимости от параметра b решить неравенство:

$$(b^2 + 2b - 3)x \le b^2 - 1.$$

Решение:

Разложим на множители коэффициент при x и правую часть неравенства:

$$(b - 1)(b + 3)x \le (b - 1)(b + 1).$$

1) если $b = 1$, то $0 \cdot x \le 0$, x — любое число;
2) если $b = -3$, то $0 \cdot x \le 8$, решений нет;
3) если $(b - 1)(b + 3) > 0$, а это будет при $b \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, то $x \le \dfrac{(b-1)(b+1)}{(b-1)(b+3)}$;

$x \le \dfrac{b+1}{b+3}$ (см. метод решения неравенства в п. 3.2.5);

4) если $(b - 1)(b + 3) < 0$, т. е. $b \in (-3; 1)$, то $x \ge \dfrac{b+1}{b+3}$.

Ответ: а) x — любое число при $b = 1$; б) решений нет при $b = -3$; в) $x \le \dfrac{b+1}{b+3}$ при $b \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; г) $x \ge \dfrac{b+1}{b+3}$ при $b \in (-3; 1)$.

3.2.4. Системы линейных неравенств. Совокупности неравенств

Если необходимо найти общее решение двух или более линейных неравенств с одной переменной, говорят, что нужно **решить систему двух и более неравенств.**

Решением системы неравенств с одной переменной называется число, при подстановке которого вместо переменной в каждое из неравенств системы они становятся верными числовыми неравенствами.

Решить систему неравенств — значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Пример 1. Решить систему неравенств: $\begin{cases} -2x < 4, \\ 5x \le 20. \end{cases}$

Решение:

Разделим первое неравенство на -2 (знак неравенства изменится на противоположный), а второе — на 5. Получим: $\begin{cases} x > -2, \\ x \le 4. \end{cases}$

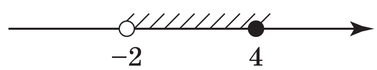


Рис. 3.15

Решением этой системы являются числа, которые одновременно больше, чем -2, и не превышают 4 (рис. 3.15).

Множество чисел x, удовлетворяющих этому условию, можно записать в виде двойного неравенства $-2 < x \le 4$, изобразить на числовой прямой. Такое множество называется **полуинтервал** и записывается $(-2; 4]$, где число -2 не принадлежит этому множеству, а число 4 принадлежит.

Аналогично вводится понятие **интервал**, т. е. множество чисел x, удовлетворяющих условию $a < x < b$, записывается $(a; b)$, где числа a и b не являются решениями соответствующей системы неравенств (рис. 3.16).

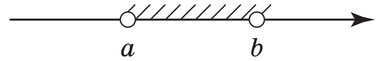


Рис. 3.16

Если числа a и b являются решениями соответствующей системы неравенств, то множество таких чисел x записывают $a \le x \le b$ или $[a; b]$. Это множество чисел называется **числовым отрезком** (рис. 3.17).

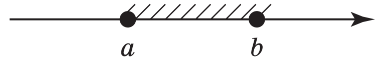


Рис. 3.17

Отрезки, интервалы, полуинтервалы и лучи называются **числовыми промежутками**. Числовые промежутки могут объединяться и пересекаться.

Пример 2. Найти объединение и пересечение промежутков $[a; b]$ и $[c; d]$, если на числовой прямой они изображаются следующим образом (рис. 3.18).

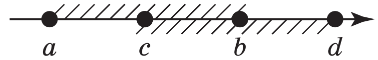


Рис. 3.18

Решение:

Очевидно, что пересечением числовых отрезков будет отрезок $[c; b]$, т. е. это множество чисел x, которые одновременно входят в $[a; b]$ и $[c; d]$.

Записывают: $[c; b] = [a; b] \cap [c; d]$.

Объединением этих отрезков будет множество чисел x, которые входят хотя бы в одно из множеств $[a; b]$ или $[c; d]$. Очевидно, что это будет отрезок $[a; d] = [a; b] \cup [c; d]$.

Аналогично можно пересекать и объединять другие числовые промежутки.

Если числовые промежутки не имеют общих элементов, их **пересечением** является **пустое множество** $\varnothing$ (рис. 3.19), например:

$$[a; b) \cap (c; d) = \varnothing.$$

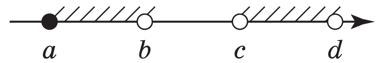


Рис. 3.19

Рассмотрим примеры решения систем линейных неравенств.

Пример 3. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3(x-1)-2(2-3x) > 5x-3, \\ 8x-3(2x+5) < 2(x-3); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{4} > \dfrac{5x}{2}-\dfrac{7}{8}, \\ \dfrac{2x+1}{4} < 5-\dfrac{1-2x}{3}. \end{cases}$

Решение:

а) Раскроем скобки в каждом неравенстве, перенесем слагаемые с переменной в левую часть неравенства, числа — в правую, приведем подобные слагаемые:

$$\begin{cases} 3x-3-4+6x > 5x-3, \\ 8x-6x-15 < 2x-6; \end{cases} \begin{cases} 3x+6x-5x > 3-3+4, \\ 8x-6x-2x < 15-6; \end{cases} \begin{cases} 4x > 4, \\ 0 < 9; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ 0 < 9. \end{cases}$$

Второе неравенство системы верно для всех значений x, поэтому общим решением будет $x > 1$ (рис. 3.20).

$$x > 1 \text{ и } x \in (1; +\infty).$$

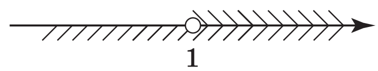


Рис. 3.20

б) Домножим первое неравенство почленно на 8, а второе — на 12 (общий знаменатель дробей).

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}\cdot 8-\dfrac{7}{4}\cdot 8>\dfrac{5x}{2}\cdot 8-\dfrac{7}{8}\cdot 8,\\ \dfrac{2x+1}{4}\cdot 12<5\cdot 12-\dfrac{1-2x}{3}\cdot 12;\end{cases}\quad \begin{cases}4x-14>20x-7,\\ 3(2x+1)<60-4(1-2x);\end{cases}\quad \begin{cases}4x-14>20x-7,\\ 6x+3<60-4+8x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x-20x>14-7,\\ 6x-8x<60-4-3;\end{cases}\quad \begin{cases}-14x>7,\\ -2x<53;\end{cases}\quad \begin{cases}x<-\dfrac{7}{14},\\ x>-\dfrac{53}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x<-0{,}5,\\ x>-26{,}5.\end{cases}$$

Получим пересечение лучей (рис. 3.21):

$x<-0{,}5$ и $x>-26{,}5$, $x\in(-26{,}5;\,-0{,}5)$.

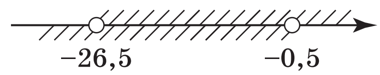


Рис. 3.21

Пример 4. Найти все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

$$\begin{cases}1-\dfrac{x}{2}\ge 0,\\ -\dfrac{x+5}{5}<-1.\end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}1-\dfrac{x}{2}\ge 0,\\ -\dfrac{x+5}{5}<-1;\end{cases}\quad \begin{cases}2-x\ge 0,\\ x+5>5;\end{cases}\quad \begin{cases}-x\ge -2,\\ x>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\le 2,\\ x>0.\end{cases}$$

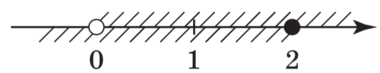


Рис. 3.22

Число нуль не является решением системы. Целыми числами, которые находятся на пересечении этих лучей, будут только 1 и 2 (рис. 3.22).

Ответ: 1; 2.

Пример 5. Найти наименьшее целое x, удовлетворяющее системе неравенств:

$$\begin{cases}13^{/10}-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}^{/5}<14^{/10}-\dfrac{7-8x}{2}^{/5};\\ 7^{/2}(3x-5)+4(17-x)^{/2}>18^{/2}-\dfrac{5(2x-6)}{2}.\end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}130-3+7x+5x+5<140-35+40x,\\ 42x-70+136-8x>36-10x+30;\end{cases}\quad \begin{cases}7x+5x-40x<140-35-130+3-5,\\ 42x-8x+10x>36+30+70-136;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-28x<-27,\\ 44x>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x>\dfrac{27}{28},\\ x>0.\end{cases}$$

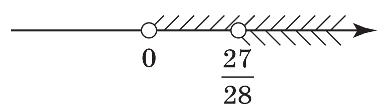


Рис. 3.23

Общим решением будет луч $\left(\dfrac{27}{28};+\infty\right)$, а наименьшим целым числом на этом множестве будет число 1 (рис. 3.23).

Ответ: 1.

Пример 6. Найти область определения функции: $y=\left(\sqrt[6]{x+7}-3\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+7\right)$.

Решение:

Областью определения данной функции будет множество x, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} x+7\ge 0, \\ 3-x>0; \end{cases} \begin{cases} x\ge -7, \\ -x>-3; \end{cases} \begin{cases} x\ge -7, \\ x<3. \end{cases}$$

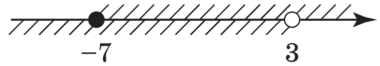


Рис. 3.24

Общее решение — на полуинтервале [−7; 3) (рис. 3.24).
Ответ: [−7; 3).

Пример 7. Решить систему неравенств: $\begin{cases} 3x+\dfrac{2x-1}{2}\ge 2x-\dfrac{1}{4}, \\ 5x-\dfrac{3x-1}{4}\le 3x+\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Решение:

Домножим первое уравнение системы на 4, а второе — на 12. Получим:

$$\begin{cases} 12x+4x-2\ge 8x-1, \\ 60x-9x+3\le 36x+4; \end{cases} \begin{cases} 12x+4x-8x\ge -1+2, \\ 60x-9x-36x\le 4-3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x\ge 1, \\ 15x\le 1; \end{cases} \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{8}, \\ x\le \dfrac{1}{15}. \end{cases}$$

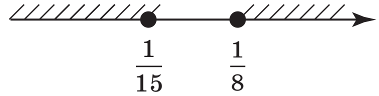


Рис. 3.25

Множество решений полученной системы пусто (рис. 3.25).
Ответ: решений нет.

Рассмотрим простейшие системы линейных неравенств с параметром.

Пример 8. При каких значениях a система $\begin{cases} 3-7x<3x-7, \\ 1+2x<a+x \end{cases}$ не имеет решений?

Решение:

$$\begin{cases} 3-7x<3x-7, \\ 1+2x<a+x; \end{cases} \begin{cases} -10x<-10, \\ x<a-1; \end{cases} \begin{cases} x>1, \\ x<a-1. \end{cases}$$

Рис. 3.26

Чтобы система не имела решений, необходимо, чтобы число $a-1$ находилось не правее числа 1 на числовой прямой, т. е. $a-1\le 1$, $a\le 2$ (рис. 3.26).
Ответ: при $a\le 2$ система не имеет решений.

Пример 9. При каких значениях параметра a уравнение $x^2-6ax+9a^2-16=0$ имеет два отрицательных корня?

Решение:

Чтобы квадратное уравнение имело два корня, необходимо, чтобы его дискриминант был положителен, т. е.

$$D=b^2-4ac>0;\ \frac{D}{4}=9a^2-9a^2+16=16;\ 16>0.$$

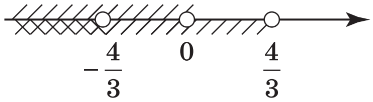
Данное уравнение всегда имеет два корня.

Уравнение — квадратное приведенное. По теореме Виета имеем: если $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$, т. е. $x_1+x_2=6a$, $x_1\cdot x_2=9a^2-16$; если $x_1<0$ и $x_2<0$, то $x_1+x_2<0$ и $x_1\cdot x_2>0$.

То есть $\begin{cases} 6a<0, \\ 9a^2-16>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a<0, \\ (3a-4)(3a+4)>0. \end{cases}$

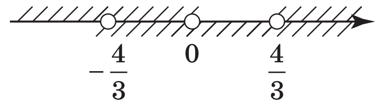
Система распадается на две:

1) $\begin{cases} a < 0, \\ 3a - 4 < 0, \\ 3a + 4 < 0; \end{cases}$



$b < -\frac{4}{3}$

2) $\begin{cases} a < 0, \\ 3a - 4 > 0, \\ 3a + 4 > 0; \end{cases}$



система несовместна

Ответ: при $b < -\frac{4}{3}$ уравнение имеет два отрицательных корня.

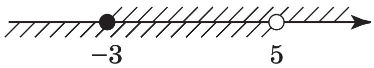
Неравенства с модулем. Системы и совокупности систем неравенств

Решение неравенств с модулем сводится к решению **системы или совокупности неравенств.**

Несколько неравенств с одной переменной образуют **системы неравенств**, если ставится задача об отыскании таких значений переменной, которые удовлетворяют **одновременно каждому** из этих неравенств. **Решением системы** является **пересечение** решений неравенств.

Например,

а) $\begin{cases} x \geq -3, \\ x < 5 \end{cases}$



$x \in [-3;\ 5)$

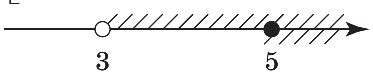
б) $\begin{cases} x \leq -3, \\ x > 5; \end{cases}$

система решений не имеет

Несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств** в том случае, если ставится задача об отыскании **всех** значений переменных, каждое из которых удовлетворяет **по крайней мере одному** из этих неравенств. **Решением совокупности** неравенств является **объединение** решений неравенств.

Например,

а) $\left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x \geq 5; \end{array}\right.$

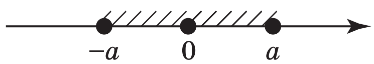


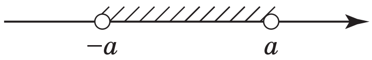
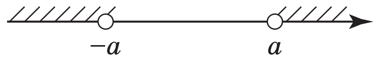
$x \in (3;\ +\infty)$

б) $\left[\begin{array}{l} x \leq -3, \\ x > 5; \end{array}\right.$

$x \in (-\infty;\ -3] \cup (5;\ +\infty)$

Решение простейших неравенств с модулем

$\lvert f(x)\rvert \leq a$:	$\lvert f(x)\rvert \geq a$:
а) если $a < 0$, решений нет; б) если $a = 0$, $f(x) = 0$; в) если $a > 0$, то неравенство равносильно **системе неравенств:** $\begin{cases} f(x) \leq a, \\ f(x) \geq -a; \end{cases}$  или двойному неравенству вида $-a \leq f(x) \leq a$	а) если $a < 0$, x — любое число; б) если $a = 0$, $f(x) = 0$; в) если $a > 0$, неравенство равносильно **совокупности неравенств:** $\left[\begin{array}{l} f(x) \leq a, \\ f(x) \geq -a; \end{array}\right.$ 

$\lvert f(x)\rvert < a$:	$\lvert f(x)\rvert > a$:
а) если $a \le 0$, решений нет; б) если $a > 0$, то неравенство **равносильно системе** неравенств: $\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a; \end{cases}$  или двойному неравенству $-a < f(x) < a$	а) если $a \ge 0$, x — любое число; б) если $a > 0$, то неравенство **равносильно совокупности** неравенств: $\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a; \end{array}\right.$ 

Пример 10. Решить неравенство:

а) $|2x - 5| < 3$;

б) $\left|\dfrac{1-3x}{4}\right| \le 1$;

в) $|2x - 4| \ge 6$;

г) $||2x - 1| - 2| > 3$;

д) $|x - 1| < 2x - 4$;

е) $|x - 4| > 2x - 1$.

Решение:

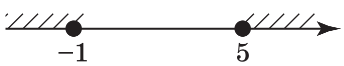
а) Данное неравенство равносильно двойному неравенству:

$$\begin{array}{l|l} -3x < x - 5 < 3 & +5 \\ 2 < 3x < 8 & :2 \\ 1 < x < 4 & \end{array}$$

б) Неравенство равносильно двойному неравенству:

$$\begin{array}{l|l} -1 \le \dfrac{1-3x}{4} \le 1 & \cdot 4 \\ -4 \le 1 - 3x \le 4 & -1 \\ -5 \le -3x \le 3 & :(-3) \\ \dfrac{3}{-3} \le x \le \dfrac{-5}{-3}; & \\ -1 \le x \le \dfrac{5}{3}. & \end{array}$$

в) Неравенство равносильно совокупности неравенств:

$\left[\begin{array}{l} 2x - 4 \ge 6, \\ 2x - 4 \le -6; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x \ge 10, \\ 2x \le -2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \ge 5, \\ x \le -1; \end{array}\right.$  $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

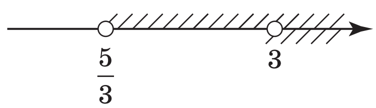
г) Данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} |2x - 1| - 2 > 3, \\ |2x - 1| - 2 < -3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |2x - 1| > 5, \\ |2x - 1| < -1. \end{array}\right.$$

Второе неравенство совокупности не имеет решения, поэтому рассмотрим решение первого неравенства:

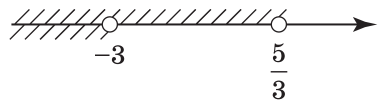
$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 > 5, \\ 2x - 1 < -5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x > 6, \\ 2x < -4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < -2. \end{array}\right.$  $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

д) Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$\begin{cases} x - 1 < 2x - 4, \\ x - 1 > -2x + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} -x < -3, \\ 3x > 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3, \\ x > \dfrac{5}{3}. \end{cases}$  $(3; +\infty)$.

е) Данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x-4>2x-1, \\ x-4<-2x+1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} -x>3, \\ 3x<5; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x<\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$$



$$\left(-\infty; \frac{5}{3}\right).$$

Ответ: а) (1; 4); б) $\left[-1; \dfrac{5}{3}\right]$; в) $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$; г) $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$;

д) $(3; +\infty)$ е) $\left(-\infty; \dfrac{5}{3}\right)$.

Пример 11. Для каждого значения a решить неравенство:
а) $|x - 3| < a$; б) $|3 - 2x| \geq a$.

Решение:

а) Если $a \leq 0$, решений нет; если $a > 0$, получим двойное неравенство $-a < x - 3 < a$ или $3 - a < x < a + 3$.

б) При $a \leq 0$ x — любое число.

Если $a > 0$, получим совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 3-2x\geq a, \\ 3-2x\leq -a; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} -2x\geq a-3, \\ -2x\leq -a-3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x\leq\dfrac{3-a}{2}, \\ x\geq\dfrac{a+3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: а) решений нет при $a \leq 0$, $3 - a < x < a + 3$ при $a > 0$;

б) $\left(-\infty; \dfrac{3-a}{2}; \dfrac{a+3}{2}; +\infty\right)$ при $a > 0$, x — любое число при $a \leq 0$.

3.2.5. Квадратные неравенства. Метод интервалов

Если левая часть неравенства — выражение вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа ($a \neq 0$), а правая часть неравенства представлена нулем, то такое неравенство называется **квадратным**.

Например, $5x^2 < 0$; $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$; $x^2 - x \geq 0$.

Существует **три метода решения квадратных неравенств**:

1) метод сведения к решению систем линейных неравенств;
2) графический метод (с помощью графика квадратичной функции);
3) метод интервалов.

Метод сведения к решению систем линейных неравенств

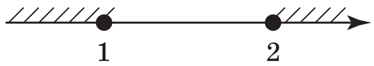
Метод сводится к разложению квадратного трехчлена на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена. Далее рассматривается совокупность соответствующих систем линейных неравенств.

Пример 1. Решить квадратное неравенство:
а) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; б) $-4x^2 + 3x + 1 < 0$.

Решение:

а) Разложим на множители квадратный трехчлен. Корни $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Поэтому $(x - 1)(x - 2) = 0$.

Произведение двух множителей неположительно, значит, множители имеют разные знаки:

$\begin{cases} x-1 \le 0, \\ x-2 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 1, \\ x \ge 2. \end{cases}$  эта система решений не имеет

Вторая система:

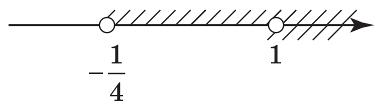
$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x-2 \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 1, \\ x \le 2. \end{cases}$  $1 \le x \le 2$

б) Умножим обе части неравенства на (-1), получим: $4x^2 - 3x - 1 > 0$.

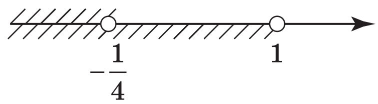
Найдем корни трехчлена: $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4 \cdot 1}}{8} = \dfrac{3 \pm 5}{8}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

Неравенство примет вид: $4(x-1)\left(x + \dfrac{1}{4}\right) > 0$.

Произведение множителей положительно, значит, множители одного знака:

$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x + \dfrac{1}{4} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ x > -\dfrac{1}{4}; \end{cases}$  $x > 1$

или

$\begin{cases} x-1 < 0, \\ x + \dfrac{1}{4} < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x < -\dfrac{1}{4}; \end{cases}$  $x < -\dfrac{1}{4}$

Решениями данного неравенства являются числа $x > 1$, а также числа $x < -\dfrac{1}{4}$.

Ответ: а) $[1;\ 2]$; б) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.

Решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции (графический метод)

Алгоритм решения квадратного неравенства графическим методом:

1. Находим нули функции соответствующей квадратичной функции или доказываем, что их нет.
2. Определяем направление ветвей параболы (если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то вниз).
3. Рисуем эскиз графика квадратичной функции.
4. По графику определяем решение неравенства.

Пример 2. Решить квадратное неравенство:

а) $x^2 - 3x - 4 \ge 0$;
б) $-2x^2 + x + 1 \ge 0$;
в) $x^2 - 14x + 49 \le 0$;
г) $x^2 + 5x + 12 > 0$;
д) $-x^2 - 1 < 0$.

Решение:

а) Корни квадратного трехчлена $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Ветви параболы направлены вверх ($a = 1 > 0$). Рисуем эскиз графика функции $y = x^2 - 3x - 4$ (рис. 3.27).

Определяем решения. По графику видно, что неотрицательные значения функция принимает при $x \le -1$ и $x \ge 4$, т. е. $x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

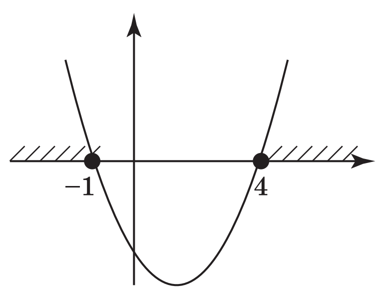


Рис. 3.27

По этому же эскизу также можно решить неравенства, отличающиеся от исходного только знаком:

$$x^2 - 3x - 4 > 0,\ x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty);$$
$$x^2 - 3x - 4 \le 0,\ x \in [-1; 4];$$
$$x^2 - 3x - 4 < 0,\ x \in (-1; 4).$$

б) Ветви параболы направлены вниз, поскольку $-2 < 0$.
Парабола пересекает ось Ox в точках:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}\ \text{(рис. 3.28).}$$

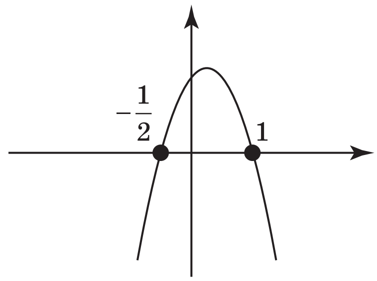


Рис. 3.28

Определим, где функция принимает неотрицательные значения. Очевидно, это будет при $-\frac{1}{2} \le x \le 1$, т. е. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

По этому же эскизу можно решить неравенства:

$$-2x^2 + x + 1 > 0,\ x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right);$$

$$-2x^2 + x + 1 \le 0,\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty);$$

$$-2x^2 + x + 1 < 0,\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$$

в) Ветви параболы направлены вверх. Соответствующий квадратный трехчлен имеет один корень $x = 7$.
По эскизу (рис. 3.29) видно, что данное неравенство имеет решение только в точке $x = 7$.
Определим по этому эскизу решения для неравенств:
$x^2 - 14x + 49 < 0$, решений нет;
$x^2 - 14x + 49 \ge 0$, решениями являются все действительные числа;
$x^2 - 14x + 49 > 0$, x — любое число, кроме 7, т. е. $x \in (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$.

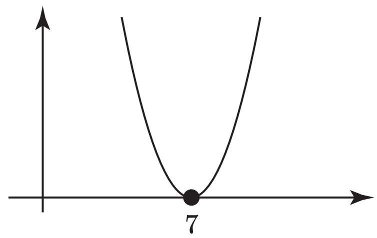


Рис. 3.29

г) Построим эскиз графика (рис. 3.30), ветви параболы направлены вверх, в уравнении $x^2 + 5x + 12 = 0$ действительных корней нет, поэтому парабола не пересекает ось Ox.

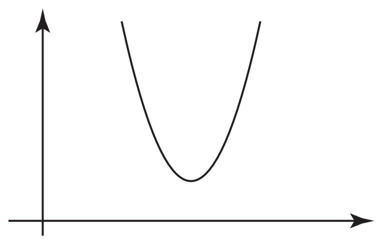


Рис. 3.30

Из рисунка видно, что решениями неравенства $x^2 + 5x + 12 > 0$ (а также $x^2 + 5x + 12 \ge 0$) являются все действительные числа.
Для неравенств $x^2 + 5x + 12 < 0$ (или $x^2 + 5x + 12 \le 0$) решений нет.

д) Ветви параболы направлены вниз (рис. 3.31), уравнение $-(x^2 + 1) = 0$ действительных корней не имеет. Тогда для неравенства $-x^2 - 1 < 0$ (и $-x^2 - 1 \le 0$) решениями являются все действительные числа; $-x^2 - 1 > 0$ (и $-x^2 - 1 \ge 0$) — решений нет.

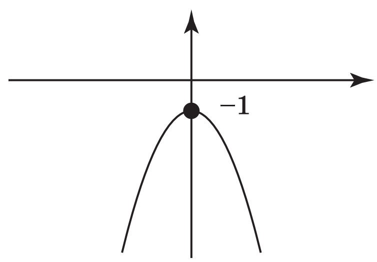


Рис. 3.31

Пример 3. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0$ выполняется для любого x?

Решение:

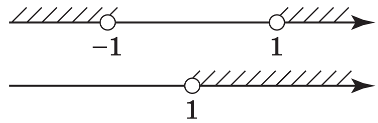
Для того чтобы квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ был положителен при всех x, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $d > 0$ и $D < 0$, где d — коэффициент при x^2.

Имеем: $d = a^2 - 1 > 0$.

Дискриминант $\dfrac{D}{4} = (a-1)^2 - (a^2-1) = a^2 - 2a + 1 - a^2 + 1 = 2 - 2a$.

Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ 2(1-a) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-1)(a+1) > 0, \\ a - 1 > 0; \end{cases}$$



Эти неравенства одновременно выполняются при $a > 1$.

Отметим, что при $a = 1$ заданный трехчлен тождественно равен 1, $1 > 0$.

Ответ: для $a \geq 1$ неравенство выполняется для всех x.

Пример 4. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0, \\ x - 5 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0. \end{cases}$

Рис. 3.32

Решение:

а) Решим первое неравенство системы: построим параболу с ветвями, направленными вверх. Найдем корни квадратного уравнения $x^2 - 9 = 0$, $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$. Решение первого неравенства: $x \leq -3$ и $x \leq 3$ (рис. 3.32).

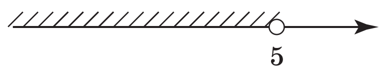


Рис. 3.33

Решение второго неравенства: $x < 5$ (рис. 3.33).

Нанесем эти решения на одну числовую прямую (рис. 3.34) и запишем общие решения:

$$x \in (-\infty; -3] \cup [3; 5).$$

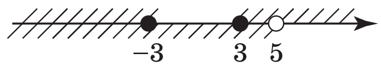


Рис. 3.34

б) Решением первого неравенства является множество x:

$x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -5$ (рис. 3.35).

Рис. 3.35

Для второго неравенства:

$x^2 - 2x - 8 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ (рис. 3.36).

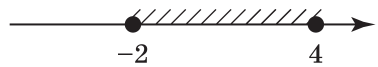


Рис. 3.36

Нанесем на одну числовую прямую общее решение (рис. 3.37): $x \in [-2; 1)$.

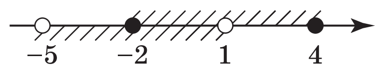


Рис. 3.37

Пример 5. Найти область определения функции:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Решение:

Очевидно, что нахождение области определения данной функции сводится к выполнению условий $x^2 - 1 \geq 0$ и $4 - x^2 > 0$, т. е. решению системы:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ 4 - x^2 > 0; \end{cases}$$

$x^2 - 1 \geq 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ (рис. 3.38);

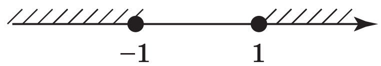


Рис. 3.38

$4 - x^2 > 0$; $x^2 - 4 < 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ (рис. 3.39);

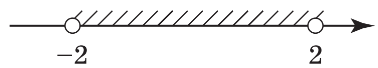


Рис. 3.39

Общее решение: $x \in (-2; -1] \cup [1; 2)$ (рис. 3.40).

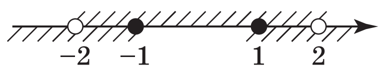
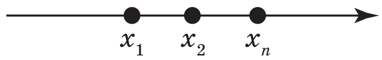
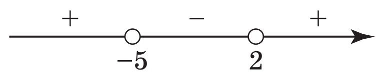


Рис. 3.40

Метод интервалов

Этот метод применяется для решения квадратных неравенств, неравенств высших степеней, дробно-рациональных неравенств, уравнений и неравенств с модулем и т. д.

Действия согласно методу интервалов	Пример
$f(x) \geq 0$	$x^2 + 7x + 10 > 0$
1. Найти корни уравнения $f(x) = 0$: $x_1, x_2, \ldots, x_n$	Найдем корни уравнения $x^2 + 7x + 10 = 0$: $x_1 = -2$, $x_2 = -5$
2. Нанести эти корни на числовую прямую, разбивая ее на интервалы: 	Наносим корни на числовую прямую, получим три интервала: 
3. Если коэффициент при старшей степени $f(x)$ положителен, то на крайнем правом интервале функция сохраняет знак «+»; остальные знаки расставлены в порядке чередования	 Коэффициент при x^2 равен $1 > 0$, поэтому на интервале $x > 2$ функция сохраняет знак «+», остальные знаки ставим в порядке чередования
4. В ответ записать интервалы, соответствующие знаку неравенства	$x^2 + 7x + 10 > 0$, поэтому в ответ пишем интервалы, где сохраняется знак «+». *Ответ*: $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$.

Пример 6. Решить неравенства методом интервалов:

а) $\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+4)(x+5)} \geq 0$; б) $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$; в) $\dfrac{x^3 - 27}{x^3 + 8} \leq 0$.

Решение:

а) Отметим на числовой прямой точки, обращающие числитель и знаменатель в нули: −5, −4, 1, 2 (рис. 3.41).

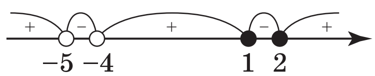


Рис. 3.41

Кружки в точках 1 и 2 закрасим, а −5 и −4 оставим пустыми, т. к. дробь равна нулю при условии, что числитель равен нулю, а знаменатель нулю не равен. Поэтому точки −5 и −4 исключены из решения неравенства.

На интервале $x > 2$ дробь положительна, далее знаки чередуются.

Получим решение:

$$x \in (-\infty; -5) \cup (-4; 1] \cup [2; +\infty).$$

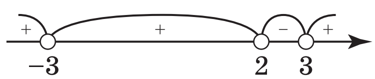


Рис. 3.42

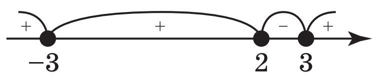


Рис. 3.43

б) Запишем неравенство в виде: $(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0$. Так как $(x + 3)^2 > 0$ при всех $x \neq -3$, то при переходе через точку −3 знак функции не изменится (рис. 3.42)

Заметим, что для неравенства вида $(x - 9)^2(x + 3)(x - 2) \geq 0$ ответ будет выглядеть так (рис. 3.43): $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$, поскольку числа −3, 2 и 3 входят в решение неравенства.

Для неравенства $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) < 0$ ответ: $(2; 3)$;
для неравенства $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) \le 0$ ответ: $\{-3\} \cup [2; 3]$, т. к. числа -3, 2 и 3 необходимо включить в решение.

в) Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \le 0.$$

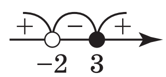
Дискриминанты уравнений $x^2 + 3x + 9 = 0$ и $x^2 - 2x + 4 = 0$ отрицательны, следовательно, уравнения решений не имеют.

Отсутствие решений означает, что квадратные трехчлены на множители не раскладываются, и на всем промежутке изменения x имеют постоянный знак, совпадающий со знаком старшего члена (в данном случае «+»).

Умножим и разделим исходное неравенство на положительные выражения $(x^2 - 2x + 4)$ и $(x^2 + 3x + 9)$ соответственно.

Получим равносильное неравенство:

$$\frac{x-3}{x+2} \le 0.$$



Разобьем числовую прямую на промежутки, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль, учитывая, что $x = -2$ не является решением неравенства.

Ответ: а) $x \in (-\infty; -5) \cup (-4; 1] \cup [2; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (3; +\infty)$;
в) $x \in (-2; 3]$.

Методом интервалов можно решать **уравнения и неравенства с модулем**.

Пример 7. Решить уравнение с модулем: $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$.

Решение:

1) Находим критические точки, т. е. значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль:

$$x_1 = 3;\ x_2 = -1.$$

2) Критические точки разбивают числовую ось на интервалы, на каждом из которых выражение под модулем сохраняет знак:

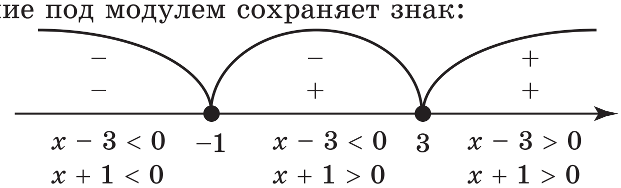


Рис. 3.44

3) Раскрываем все модули на каждом интервале, решаем полученное уравнение, проверяем, принадлежит ли полученный корень рассматриваемому интервалу:

а) $x \le -1$. Получим уравнение:

$$-(x - 3) - 2(x + 1) = 4;\ -x + 3 - 2x - 2 = 4;\ -3x = 3;\ x = -1.$$

Корень принадлежит рассматриваемому интервалу.

б) $-1 < x < 3$.

Уравнение $-(x - 3) + 2(x + 1) = 4$; $-x + 3 + 2x + 2 = 4$; $x = -1$.

Этот корень не принадлежит рассматриваемому интервалу.

в) $x \ge 3$.

$$(x - 3) + 2(x + 1) = 4;\ x - 3 + 2x + 2 = 4;$$

$$3x = 5;\ x = \frac{5}{3}$$ — этот корень не принадлежит интервалу $x \ge 3$.

Ответ: -1.

Аналогично решаются неравенства с модулем.

Пример 8. Решить неравенство: $|x - 1| + |x + 1| < 4$.

Решение:

Критические точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ разбивают числовую ось на три интервала:

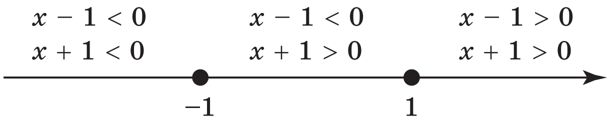
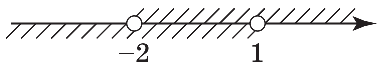


Рис. 3.45

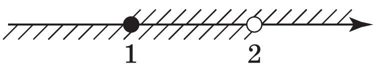
Рассмотрим решение неравенства на каждом интервале.

а) $\begin{cases} x < -1, \\ -x + 1 - x - 1 < 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1, \\ x > -2; \end{cases}$ 

$-2 < x < 1$

б) $\begin{cases} -1 \le x < 1, \\ -x + 1 + x + 1 < 4; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x < 1, \\ 2 < 4. \end{cases}$

Числовое неравенство $2 < 4$ верно для всех x, решением является весь промежуток $-1 \le x < 1$.

в) $\begin{cases} x \ge 1, \\ x - 1 + x + 1 < 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 1, \\ x < 2; \end{cases}$ 

$1 \le x < 2$

Объединяем полученные множества решений, получим $-2 < x < 2$.

Ответ: $x \in (-2; 2)$.

Пример 9. Решить неравенство: $|x - a| < 2x - 1$, где a — параметр.

Решение:

Критическая точка $x = a$. Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge a, \\ x - a < 2x - 1, \\ 2x - 1 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ -x + a < 2x - 1, \\ 2x - 1 > 0; \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} x \ge a, \\ x > 1 - a, \\ x > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ x > \dfrac{a+1}{3}, \\ x > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array}$$

Рассмотрим каждую систему в отдельности:

а) $\begin{cases} x \ge a, \\ x > 1 - a, \quad a = 1 - a \text{ при } a = \dfrac{1}{2}. \\ x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Если $a \le \dfrac{1}{2}$, то расположение точек a; $1 - a$ и $\dfrac{1}{2}$ на числовой оси следующее:

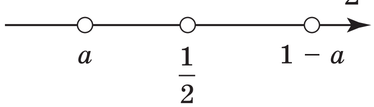


Рис. 3.46

Тогда решение системы — множество $x > 1 - a$.

Если $a > \dfrac{1}{2}$, получаем:

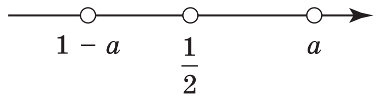


Рис. 3.47

Тогда решение системы — множество $x \geq a$;

б) $\begin{cases} x < a, \\ x > \dfrac{a+1}{3}, \\ x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ $a = \dfrac{a+1}{3}$ при $a = \dfrac{1}{2}$, если $a \leq \dfrac{1}{2}$, решений нет; если $a > \dfrac{1}{2}$, то расположение точек следующее:

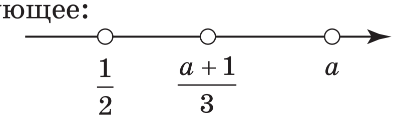


Рис. 3.48

Получаем $\dfrac{a+1}{3} < x < a$.

Объединим решения двух систем неравенств.

Ответ: а) $(1 - a; +\infty)$, если $a \leq \dfrac{1}{2}$; б) $\left(\dfrac{a+1}{3}; +\infty\right)$, если $a > \dfrac{1}{2}$.

3.3. Текстовые задачи

3.3.1. Решение текстовых задач арифметическим способом

Задачи на масштаб

Отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на местности называют **масштабом карты**.

Например, масштаб карты 1 : 100 000 означает, что 100 000 см на местности соответствует 1 см на карте. Масштаб географической карты — это частное, меньшее единицы. Существуют масштабы больше единицы, например, технические чертежи, изображения, полученные с помощью микроскопа, и т. д. Например, масштаб 9:1 означает, что размер предмета на чертеже увеличен в 9 раз.

Задача 1. Трубопровод длиной 50 км изображен на карте отрезком 2,5 см. Найти масштаб карты.

Решение:

Переведем длину трубопровода в сантиметры: 50 км = 50 000 м = 5 000 000 см. Найдем отношение длины отрезка на карте и длины отрезка на местности: 2,5 : 5 000 000 = 25 : 50 000 000 = 1 : 2 000 000.

Ответ: 1 : 200 000.

Задача 2. Длина железнодорожной магистрали из Москвы до Курска приближенно равна 540 км. Какой длины будет линия, изображающая эту магистраль, на карте, сделанной в масштабе 1 : 10 000 000?

Решение:

1) 540 км = 540 000 м = 54 000 000 (см);
2) 54 000 000 : 10 000 000 = 5,4 (см).

Ответ: 5,4 см.

Задача 3. На плане изображен участок земли в виде прямоугольника со сторонами 2 и 8 см. Чему равна площадь этого участка, если масштаб плана 1 : 1500?

Решение:

Найдем стороны прямоугольного участка на местности:

2 см · 1500 = 3 000 см = 30 м; 8 см · 1500 = 12 000 см = 120 (м).

Тогда площадь участка: 30 · 1200 = 36 000 м^2 = 3,6 (га).

Ответ: 3,6 га.

Задача 4. Деталь на чертеже, выполненном в масштабе 5 : 1, имеет длину 2,7 см. Какую длину будет иметь деталь на чертеже, выполненном в масштабе 9 : 1?

Решение:

Масштаб 5 : 1 означает, что истинные размеры детали в пять раз больше, чем на чертеже, т. е. 2,7 см · 5. Масштаб 9 : 1 означает, что изображение детали на чертеже уменьшат в 9 раз, т. е. длина детали на этом чертеже будет:

$$2,7 \cdot 5 : 9 = \frac{2,7 \cdot 5}{9} = 0,3 \cdot 5 = 1,5.$$

Ответ: 1,5 см.

Задачи на нахождение среднего арифметического нескольких чисел

Средним арифметическим нескольких чисел называют частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых:

$$\text{среднее арифметическое} = \frac{\text{сумма чисел}}{\text{количество слагаемых}}.$$

Задача 1. Во время соревнований по фигурному катанию за произвольную программу спортсменка получила следующие оценки: 5,9; 5,8; 5,9; 5,7 и 6,0. Каков средний балл, полученный фигуристкой в этом виде катания?

Решение:

Найдем среднее арифметическое этих пяти чисел:

(5,9 + 5,8 + 5,9 + 5,7 + 6,0) : 5 = 5,86.

Ответ: 5,86.

Задача 2. Поезд шел 4 ч со скоростью 72 км/ч и 2 ч со скоростью 84 км/ч. Найти среднюю скорость поезда на этом участке пути.

Решение:

Весь путь составит: 72 · 4 + 84 · 2 = 456 (км), время движения: 4 + 2 = 6 (ч), тогда средняя скорость равна: 456 : 6 = 76 (км/ч).

Ответ: 76 км/ч.

Среднюю скорость можно найти так:

$$\text{средняя скорость} = \frac{\text{весь пройденный путь}}{\text{все время движения}}.$$

Аналогично можно найти среднюю урожайность, среднюю производительность и т. д.

Если известно среднее арифметическое, то **сумму чисел** можно найти так:
Сумма чисел = (среднее арифметическое) · (количество чисел).

Задача 3. Средний возраст 11 футболистов — 23 года. Во время игры одного футболиста удалили, и средний возраст футболистов стал 22 года. Сколько лет удаленному футболисту?

Решение:

Средний возраст 11 футболистов — 23 года, значит общая сумма их возрастов: 23 · 11 = 253 (года). После удаления одного игрока футболистов осталось 10, их средний возраст: 22 · 10 = 220 (лет). Значит, удалили футболиста, которому: 253 − 220 = 33 (года).
Ответ: 33 года.

Задачи на движение

Пусть во всех задачах автомобиль движется со скоростью 80 км/ч, а мотоциклист — со скоростью 50 км/ч.

Задача 1. Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали автомобиль и мотоциклист. Какое расстояние будет между ними через 1 ч, 2 ч, через какое время они встретятся? Расстояние между городами 325 км.

Решение:

Количество километров, на которое за единицу времени сближаются автомобиль и мотоцикл, называют **скоростью сближения**. В данном случае: 80 + 50 = = 130 (км/ч).

За один час они сблизятся на 130 км.

За два часа они сблизятся на: 130 · 2 = 260 (км).

Встретятся через: 325 : 130 = 2,5 (ч).

Ответ: 130 км; 260 км; 2,5 ч.

Рис. 3.49

Задача 2. После встречи автомобиль и мотоцикл отправились в противоположные стороны. На какое расстояние они удалятся друг от друга за 1 ч, за 2 ч?

Решение:

Количество километров, на которое за единицу времени удаляются автомобиль и мотоцикл, называется **скоростью удаления друг от друга**. Это: 80 + 50 = = 130 (км).

За час они удалятся на 130 км.

За два часа — на: 130 · 2 = 260 (км).

Ответ: 130 км; 260 км.

При движении навстречу друг другу (в стороны друг от друга) скорость сближения (удаления) равна сумме скоростей.

Задача 3. Автомобиль и мотоцикл выехали одновременно в одну сторону из двух пунктов, расстояние между которыми 390 км. На какое расстояние они сблизятся через 1 ч, 2 ч, когда автомобиль догонит мотоцикл?

Решение:

Расстояние между автомобилем и мотоциклом будет сокращаться каждый час на: 80 − 50 = 30 (км).

За 1 ч они сблизятся на 30 км, за 2 ч — на: 30 · 2 = 60 (км). Автомобиль догонит мотоцикл через: 390 : 30 = 13 (ч).

Ответ: 30 км; 60 км; 13 ч.

Рис. 3.50

Задача 4. Автомобиль и мотоцикл одновременно выехали из одного пункта в одном направлении. При этом автомобиль удаляется от мотоцикла. На какое расстояние они удалятся друг от друга за 1 ч, 2 ч?

Решение:

Расстояние между автомобилем и мотоциклом каждый час будет увеличиваться на: $80 - 50 = 30$ (км).

За 1 ч они удалятся на 30 км, за 2 ч — на: $0 \cdot 2 = 60$ (км).

Ответ: 30 км; 60 км.

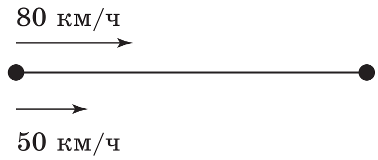


Рис. 3.51

При движении в одном направлении скорость сближения (удаления) равна разности скоростей.

Задача 5. Расстояние между селом и городом 280 км. Из села в город выехал легковой автомобиль. Одновременно с ним из города в село выехала грузовая машина. Сколько километров проехала грузовая машина до встречи с легковым автомобилем, если грузовая машина двигалась со скоростью 48 км/ч, что составляло 3/4 от скорости легкового автомобиля?

Решение:

1) $48 : \dfrac{3}{4} = \dfrac{48 \cdot 4}{3} = 64$ (км/ч) — скорость легкового автомобиля;
2) $48 + 64 = 112$ (км/ч) — скорость сближения;
3) $280 : 112 = 2{,}5$ (ч) — встретятся легковой и грузовой автомобили;
4) $48 \cdot 2{,}5 = 120$ (км) — пройдет грузовой автомобиль до встречи.

Ответ: 120 км.

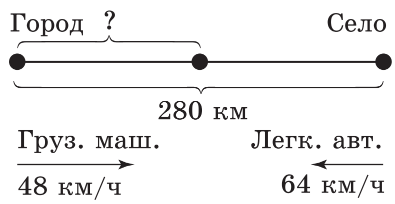


Рис. 3.52

Движение по течению и против течения

Скорость движения по течению = скорость собственная + скорость течения.
Скорость движения против течения = скорость собственная − скорость течения.

Задача 6. Катер движется по течению реки со скоростью 15,2 км/ч, а против течения — 8,2 км/ч. Какова скорость течения?

Решение:

Скорость движения по течению отличается от скорости движения против течения на две скорости течения, т. е. скорость течения: $(15{,}2 - 8{,}2) : 2 = 3{,}5$ (км/ч).

Ответ: 3,5 км/ч.

Задача 7. Моторная лодка прошла 207 км по течению реки за 13,5 ч, потратив $\dfrac{1}{9}$ часть времени на остановки. Скорость течения реки 1,75 км/ч. Сколько километров может пройти эта лодка за 2 ч против течения?

Решение:

1) $13{,}5 - 13{,}5 \cdot \dfrac{1}{9} = 13{,}5 - 1{,}5 = 12$ (час) — время движения лодки по течению без остановок;
2) $207 : 12 = 17{,}25$ (км/ч) — скорость по течению;
3) $17{,}25 - 1{,}75 = 15{,}5$ (км/ч) — собственная скорость лодки;

4) $15{,}5 - 1{,}75 = 13{,}75$ (км/ч) — скорость против течения;
5) $13{,}75 \cdot 2 = 27{,}5$ (км) — пройдет лодка за 2 ч против течения.
Ответ: 27,5 км.

Задачи на совместную работу

Если в задачах на совместную работу не указан объем работ, то всю работу принимают за единицу. Кроме того, в этих задачах рассматривается время, в течение которого производится работа, и производительность, т. е. работа, произведенная в единицу времени.

Задача 8. Два тракториста вспахали поле за 12 ч. Один тракторист, работая самостоятельно, может вспахать поле за 30 ч. За сколько вспахал бы поле второй тракторист, работая сам?

Решение:

Если два тракториста вспахали поле за 12 ч, значит, за 1 ч они вспашут $\frac{1}{12}$ часть поля. Первый тракторист вспашет все поле за 30 ч, а за 1 ч — $\frac{1}{30}$ поля. Тогда второй тракторист вспашет: $\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=\frac{5-2}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$ часть поля. Значит, второй тракторист, работая сам, вспашет поле за 20 ч.
Ответ: 20 ч.

Задача 9. В бассейн проведено три трубы: через первую трубу бассейн может наполниться за 6 ч, через другую — за 4 ч, а через третью трубу вся вода из наполненного бассейна может вытечь за 12 ч. За какое время может наполниться половина бассейна, если открыть все три трубы?

Решение:

За 1 ч первая труба наполняет $\frac{1}{6}$ часть, вторая — $\frac{1}{4}$ часть, через третью вытекает $\frac{1}{12}$ часть. То есть за 1 ч наполнится: $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2+3-1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ часть бассейна. Тогда весь бассейн наполнится за 3 ч, а половина бассейна — за 1,5 ч.
Ответ: 1,5 ч.

Задачи на дроби и отношения

Задача 10. За первый день турист прошел $\frac{1}{3}$ часть пути, за второй — $\frac{3}{8}$ оставшего пути, а за третий — остальные 30 км. Какое расстояние прошел турист за три дня?

Решение:

1) $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ — часть пути прошел турист за второй и третий день вместе;
2) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$ — прошел турист за второй день;

3) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{8-3}{12}=\dfrac{5}{12}$ — прошел турист за третий день, что составило 30 км;

4) $30:\dfrac{5}{12}=\dfrac{30\cdot 12}{5}=72$ (км) — прошел за 3 дня.

Ответ: 72 км.

Задача 11. В первой школе 840 учеников, во второй — на $\dfrac{1}{7}$ этого числа больше, в третьей — $\dfrac{5}{6}$ числа учеников второй школы, а в четвертой — $\dfrac{3}{10}$ числа учеников первых трех школ вместе. Сколько учеников в четырех школах вместе?

Решение:

1) $840+840\cdot\dfrac{1}{7}=840+120=960$ (учеников) — во второй школе;

2) $960\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{960\cdot 5}{6}=800$ (учеников) — в третьей школе;

3) $(840+960+800)\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{2600\cdot 3}{10}=780$ (учеников) — в четвертой школе;

4) 840 + 960 + 800 + 780 = 3 380 (учеников).

Ответ: 3 380 учеников.

Задача 12. В двух слитках серебра массой 300 г и 400 г различное процентное содержание серебра. Каждый из слитков следует разделить на две части так, чтобы из получившихся четырех кусков можно было изготовить два слитка массой 200 г и 500 г с равным процентным содержанием серебра. На какие части следует разделить каждый слиток?

Решение:

Очевидно, что в новых слитках, т. е. слитках массой 200 г и 500 г, процентное содержание серебра должно быть таким же, как и в слитке массой 700 г, получившемся бы при сплавлении вместе исходных слитков.

Следовательно, отношение, в котором в каждый новый слиток входят части исходных, должно быть: 300 : 400 = 3 : 4. Получили задачу: разделить заданную величину на части, пропорциональные числам 3 : 4.

200-граммовый слиток должен содержать:

$$\frac{3}{7}\cdot 200=\frac{600}{7}\ \text{(г) — исходного первого слитка;}$$

$$\frac{4}{7}\cdot 200=\frac{800}{7}\ \text{(г) — исходного второго.}$$

Аналогично для 400-граммового слитка:

$$\frac{3}{7}\cdot 500=\frac{1500}{7}$$

$$\frac{4}{7}\cdot 500=\frac{2000}{7}.$$

Ответ: слиток массой 300 г следует разделить на части $\dfrac{600}{7}$ г и $\dfrac{1500}{7}$ г, а слиток массой 400 г — на части $\dfrac{800}{7}$ г и $\dfrac{2\,000}{7}$ г.

3.3.2. Решение текстовых задач алгебраическим способом

Задачи на движение

При решении задач на движение используется формула:

$$\boxed{s = v \cdot t}$$

где v — скорость движения, t — время, s — расстояние, пройденное за время t со скоростью v.

Отсюда получим формулы: $t = \frac{s}{v}$ и $v = \frac{s}{t}$.

Задача 1. Пассажир, ехавший в поезде со скоростью 60 км/ч, заметил, что встречный поезд прошел мимо него за 2,5 с. Определить скорость встречного поезда, если его длина 100 м.

Решение:

Пусть скорость встречного поезда x км/ч, тогда его скорость относительно пассажира — $(x + 60)$ км/ч. 100 м = 0,1 км. Воспользуемся формулой $t = \frac{s}{v}$, получим уравнение $\frac{0{,}1}{x+60} = 2{,}5 \cdot \frac{1}{3\,600}$; $x + 60 = 144$; $x = 84$.

Ответ: 84 км/ч.

Задача 2. Дорогу от A до B велосипедист проезжает со скоростью v_1 км/ч, а обратную дорогу от B до A — со скоростью v_2 км/ч. Определить среднюю скорость велосипедиста.

Решение:

Пусть s — расстояние от A до B, t_1 и t_2 — время, затраченное велосипедистом соответственно на прямой и обратный путь, тогда $t_1 = \frac{s}{v_1}$ и $t_2 = \frac{s}{v_2}$.

Общее время пути: $t = t_1 + t_2$. За это время велосипедист преодолевает расстояние $2s$. Тогда средняя скорость: $v = \frac{2s}{t}$ или $v \cdot t = 2s$.

Получим уравнение: $v \cdot \left(\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}\right) = 2s$; $v \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 \cdot v_2} = 2$; $v = \frac{2v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}$.

Например, если $v_1 = 20$ км/ч и $v_2 = 30$ км/ч, то: $v = \frac{2 \cdot 20 \cdot 30}{20 + 30} = 24$ км/ч.

Ответ: $v = \frac{2v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}$.

Задача 3. Дорога от A до B длиной 11,5 км идет сначала вверх, потом по ровному участку и затем вниз. Пешеход, идя из A в B, прошел дорогу за 2 ч 54 мин, а на обратную дорогу затратил 3 ч 6 мин. Скорость пешехода: вверх — 3 км/ч, по ровному участку — 4 км/ч, вниз — 5 км/ч. Найти протяженность ровного участка пути.

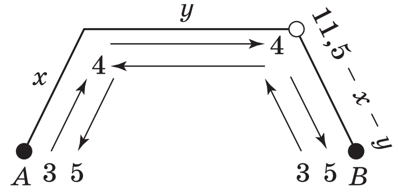


Рис. 3.53

Решение:

Пусть при движении от A до B x — длина дороги вверх, y — длина ровного участка, тогда $(11{,}5 - x - y)$ — длина дороги вниз.

При движении от B до A имеем: $(11{,}5 - x - y)$ — протяженность пути вверх, x — протяженность пути вниз.

При движении от A до B: $\dfrac{x}{3}$ — время движения вверх; $\dfrac{y}{4}$ — время движения по ровному участку; $\dfrac{11{,}5 - x - y}{5}$ — время движения вниз.

Аналогично при движении от B до A: $\dfrac{11{,}5 - x - y}{3}$ — время движения вверх; $\dfrac{x}{5}$ — время движения вниз; $\dfrac{y}{4}$ — время движения по ровному участку.

Получим систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{11{,}5 - x - y}{5} = 2\dfrac{54}{60}, \\ \dfrac{11{,}5 - x - y}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{x}{3} = 3\dfrac{6}{60}. \end{cases}$

Сложим почленно уравнения: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{11{,}5 - x - y}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{11{,}5 - x - y}{5} + \dfrac{x}{5} = 6;$

$$\frac{11{,}5}{3} - \frac{y}{3} + \frac{y}{2} + \frac{11{,}5}{5} - \frac{y}{5} = 6; \ y = 4.$$

Ответ: 4 км.

Составление неравенств в задачах на движение

Задача 4. Велосипедист выехал из A в B. Расстояние от A до B равно 60 км, скорость велосипедиста постоянна. Не задерживаясь в B, он едет обратно с той же скоростью, но через час после выезда из B делает остановку на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 км/ч. В каком интервале заключена скорость v велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил времени не более, чем от A до B?

Решение:

Пусть первоначальная скорость велосипедиста — x км/ч. Тогда время его движения из A и B равна $t_{AB} = \dfrac{60}{x}$ ч, а обратно — $t_{BA} = \dfrac{60 - x}{x + 4} + 1\dfrac{1}{4}$ ч.

По условию $t_{BA} \le t_{AB}$, тогда:

$$\frac{60 - x}{x + 4} + \frac{4}{3} \le \frac{60}{x}; \ \frac{60 - x}{x + 4} - \frac{60}{x} + \frac{4}{3} \le 0;$$

$$\frac{x^2 + 16x - 720}{x(x + 4)} \le 0.$$

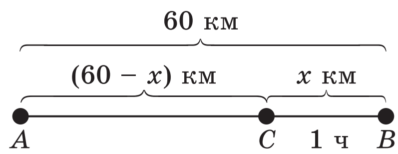
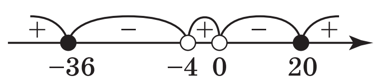


Рис. 3.54

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{(x - 20)(x + 36)}{x(x + 4)} \le 0.$$



Поскольку скорость не может быть отрицательной, то нам подходит только промежуток (0; 20].

Ответ: $0 < v \le 20$ км/ч.

Задачи на движение тел по окружности

Задача 5. По окружности длиной 60 м равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом точки встречаются каждый раз через 1 мин. Определить скорости точки.

Решение:

Пусть x с — время, за которое первая точка делает полный оборот, вторая точка — за y с. Тогда скорости точек соответственно:

$$v_1 = \frac{60}{x} \text{ м/с} = \frac{3\,600}{x} \text{ м/мин и } v_2 = \frac{60}{y} \text{ м/с} = \frac{3\,600}{y} \text{ м/мин.}$$

Пусть $x < y$, тогда по условию $y - x = 5$.

Поскольку точки встречаются каждую минуту и первая движется быстрее, она должна за 1 мин пройти полный круг 60 м и еще столько, сколько успеет пройти за 1 мин вторая точка, т. е. $\frac{3\,600}{y}$ (м).

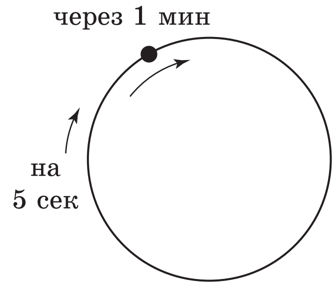


Рис. 3.55

Получим второе уравнение:

$$\frac{3\,600}{x} = \frac{3\,600}{y} + 60 \text{ или } \frac{60}{x} = \frac{60}{y} + 1;$$

$$60y - 60x = xy.$$

Составим систему: $\begin{cases} y - x = 5, \\ 60y - 60x = xy. \end{cases}$

Решим систему способом подстановки: $y = x + 5$.

$60(x + 5) - 60x = x(x + 5)$; $x^2 - 5x - 300 = 0$; $x_1 = 15$; $x_2 = -20$ — не удовлетворяет условию задачи. $x = 15$, $y = 20$.

Тогда $v_1 = \frac{60}{15} = 4$ (м/с); $v_2 = \frac{60}{20} = 3$ (м/с).

Ответ: 4 м/с; 3 м/с.

Задача 6. Пассажирский и товарный поезда выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 1080 км. Пассажирский поезд проходил за 1 ч на 10 км больше, чем товарный. Найти скорость каждого поезда, если через 5 ч после выхода расстояние между ними составило 630 км.

Решение:

Пусть x км/ч — скорость товарного поезда.

Поместим данные в таблицу.

Вид транспорта	v, км/ч	t, ч	s, км
Товарный поезд	x	5	$5x$
Пассажирский поезд	$x + 10$	5	$5(x + 10)$

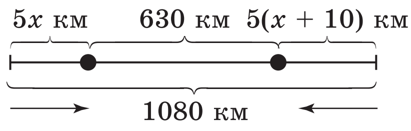


Рис. 3.56

Общий путь составит:

$$5x + 5(x + 10) + 630 = 1080;$$
$$5x + 5x + 50 + 630 = 1080;$$
$$x = 40;\ x + 10 = 50.$$

Ответ: 40 км/ч, 50 км/ч.

Задача 7. С аэродрома вылетают одновременно в пункт, который удален от него на 2 400 км, два самолета. Скорость одного из них на 120 км/ч больше скорости другого, поэтому он прилетит в пункт назначения на час раньше. Найти скорость каждого самолета.

Решение:

Пусть скорость одного самолета — x км/ч, тогда второго — $(x + 120)$ км/ч.

Поместим данные в таблицу.

Самолет	v, км/ч	t, ч	s, км
Первый (с меньшей скоростью)	x	$\frac{2\,400}{x}$	2 400
Второй (с большей скоростью)	$x + 120$	$\frac{2\,400}{x+120}$	2 400

Поскольку величина $\frac{2\,400}{x}$ на 1 час больше, чем $\frac{2\,400}{x+120}$, получим уравнение:

$$\frac{2\,400}{x} - \frac{2\,400}{x+120} = 1.$$

$2\,400(x + 120) - 2\,400x = x(x + 120)$; $x^2 + 120x - 288\,000 = 0$; $x_1 = -600$, $x_2 = 480$.
x_1 — не удовлетворяет условию задачи, $x = 480$, $x + 120 = 600$.
Ответ: 480 км/ч и 600 км/ч.

Задачи на движение по реке (по течению и против течения)

Если $v_с$ — собственная скорость лодки (катера и т. д.), $v_{теч}$ — скорость течения реки, то скорость по течению: $v_{по} = v_с + v_{теч}$, скорость против течения: $v_{пр} = v_с - v_{теч}$.

Задача 8. Катер проплыл 9 км по течению реки и 14 км против течения, затратив на весь путь столько времени, сколько ему потребуется, чтобы проплыть 24 км в стоячей воде. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч.

Решение:

Пусть скорость катера в стоячей воде (т. е. собственная скорость катера) — x км/ч.

Поместим данные в таблицу.

Направление движения	v, км/ч	t, ч	s, км
По течению	$x + 2$	$\frac{9}{x+2}$	9
Против течения	$x - 2$	$\frac{14}{x-2}$	14
В стоячей воде	x	$\frac{24}{x}$	24

Время движения по течению и против течения равно времени движения в стоячей воде. Получим уравнение:

$$\frac{9}{x+2} + \frac{14}{x-2} = \frac{24}{x};$$

$$9x(x - 2) + 14x(x + 2) = 24(x - 2)(x + 2);$$

$$x^2 - 10x + 96 = 0;$$
$$x_1 = -6;\ x_2 = 16.$$

Число −6 не удовлетворяет условию задачи, $x = 16$.

Ответ: 16 км/ч.

Задача 9. Моторной лодке, чтобы пройти 12 км по течению реки и возвратиться назад, необходимо 2,5 ч. За 1 ч 20 мин она проходит 4 км по течению реки и 8 км против течения. Найти скорость лодки в стоячей воде (собственную скорость) и скорость течения реки.

Решение:

Пусть x — собственная скорость лодки, y — скорость течения реки.

Поместим данные в таблицы.

Направление движения	v, км/ч	t, ч	s, км
По течению	$x + y$	$\frac{12}{x+y}$	12
Против течения	$x - y$	$\frac{12}{x-y}$	12

Общее время движения — 2,5 ч

Направление движения	v, км/ч	t, ч	s, км
По течению	$x + y$	$\frac{4}{x+y}$	4
Против течения	$x - y$	$\frac{8}{x-y}$	8

Общее время движения — 1 ч 20 мин $= 1\frac{1}{3}$ ч

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{12}{x+y} + \dfrac{12}{x-y} = 2,5, \\ \dfrac{4}{x+y} + \dfrac{8}{x-y} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{24}{x+y} + \dfrac{24}{x-y} = 5, \\ \dfrac{12}{x+y} + \dfrac{24}{x-y} = 4. \end{cases}$$

Сделаем замену: $t_1 = \dfrac{12}{x+y}$; $t_2 = \dfrac{24}{x-y}$, получим систему:

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 = 5, \\ t_1 + t_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 3. \end{cases}$$

Возвращаемся к переменным x и y:

$$\frac{12}{x+y} = 1;\ \frac{24}{x-y} = 3 \text{ или } \begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = 8; \end{cases} \quad x = 10,\ y = 2.$$

Ответ: 10 км/ч и 2 км/ч.

Задачи на совместную работу

В задачах на работу содержатся следующие величины:

t — время, в течение которого производится работа;

N — производительность, т. е. работа, произведенная в единицу времени;

A — работа, произведенная за время t.

Эти три величины связывает уравнение:

$$\boxed{A = Nt}$$

Если в задаче не указано, какой конкретно объем работы выполняется, то работу принимают за единицу.

В задачах на перекачивание жидкости насосами за единицу принимают объем перекачанной жидкости.

Задача 10. Пусть бассейн наполняется первой трубой за t_1 ч, а второй — за t_2 ч. Найти время наполнения бассейна t при одновременном открытии кранов.

Решение:

Поместим данные в таблицу.

	Производительность, N	**t, ч**	**Объем бассейна**
Первая труба	$\frac{1}{t_1}$	t_1	1
Вторая труба	$\frac{1}{t_2}$	t_2	1
Обе трубы вместе	$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}$	t	1

Время t наполнения бассейна обеими трубами $t=1:N=1:\frac{t_1+t_2}{t_1\cdot t_2}=\frac{t_1\cdot t_2}{t_1+t_2}$.

Например, если t_1 = 20 мин, а t_2 = 30 мин, то $t=\frac{20\cdot 30}{20+30}=12$ (мин).

Ответ: $\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}$.

Задача 11. При испытании на экономичность двух двигателей внутреннего сгорания одинаковой мощности было установлено, что один израсходовал 600 г бензина, а второй, работавший на 2 ч меньше, израсходовал 384 г. Если бы первый двигатель расходовал в час столько же бензина, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то за то же время работы расход бензина в обоих двигателях был бы одинаков. Сколько бензина в час расходует каждый двигатель?

Решение:

Пусть x и $x-2$ — время работы в час первого и второго двигателей.

Поместим данные в таблицу.

	Производительность, N	**t, ч**	**Объем бензина, г**
Первый двигатель	$\frac{600}{x}$	x	600
Второй двигатель	$\frac{384}{x-2}$	$x-2$	384

Получим уравнение:

$$\frac{600}{x}\cdot(x-2)=\frac{384}{x-2}\cdot x;\ 9x^2-100x+100=0;\ x_1=10 \text{ и } x_2=\frac{10}{9}.$$

По условию $x>2$. Тогда $x=10$; $\frac{600}{10}=60$; $\frac{384}{8}=48$.

Ответ: 60 г и 48 г.

Задача 12. Двое рабочих заняты на одной и той же работе. Сначала один проработал треть того времени, которое требуется второму для выполнения всей работы, потом второй проработал треть того времени, которое потратил бы первый на выполнение всей работы. После этого оказалось, что выполнено $\frac{5}{6}$ всей работы. Определить, сколько времени потребовалось бы для выполнения работы каждому рабочему, если вместе они могут выполнить ее за 1 ч 20 мин.

Решение:

Пусть x и y — количество часов, затраченное для выполнения всей работы соответственно первым и вторым рабочим, 1 — объем всей работы.

Производительность первого рабочего — $N_1 = \frac{1}{x}$, второго — $N_2 = \frac{1}{y}$.

Первое условие дает $N_1 \cdot \frac{y}{3} + N_2 \cdot \frac{x}{3} = \frac{5}{6}$ или $\frac{1}{x} \cdot \frac{y}{3} + \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{3} = \frac{5}{6}$; $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$.

Второе условие дает $(N_1 + N_2)\frac{4}{3} = 1$ или $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\frac{4}{3} = 1$.

То есть $x + y = \frac{3}{4}xy$. Получим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy, \\ x + y = \frac{3}{4}xy; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = \frac{5}{2}xy + 2xy, \\ x + y = \frac{3}{4}xy; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)^2 = \frac{9}{2}xy, \\ (x + y) = \frac{3}{4}xy. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} xy = 8, \\ x + y = 6. \end{cases}$ Решением является пара чисел (2; 4) или (4; 2).

Ответ: 2 ч; 4 ч.

Задачи на планирование

Задачи на планирование — это задачи на совместную работу, в которых выполняемый объем работы известен или его нужно определить. При этом сравнивается работа, которая должна быть выполнена по плану, и работа, которая выполняется фактически.

Как и в задачах на совместную работу, основными компонентами являются:
а) работа (выполненная фактически и запланированная);
б) время выполнения работы (фактическое и запланированное);
в) производительность труда (фактическая и запланированная).

Задача 13. Ученик токаря вытачивает шахматные пешки для определенного количества шахматных комплектов. Если он будет изготовлять на 2 пешки больше, то выполнит задание на 10 дней быстрее. Если он сможет изготовлять ежедневно на 4 пешки больше, то срок исполнения задания уменьшится на 16 дней.

Сколько шахматных комплектов обеспечивает пешками этот токарь, если для каждого комплекта нужно 16 пешек?

Решение:

Пусть x — количество пешек для определенного числа комплектов шахмат, а в день он вытачивает y пешек.

Поместим данные в таблицу.

	Производительность (пешек за 1 день)	**Время, дней**	**Всего пешек**
В день y пешек	y	$\frac{x}{y}$	x
В день $y + 2$ пешки	$y + 2$	$\frac{x}{y+2}$	x
В день $y + 4$ пешки	$y + 4$	$\frac{x}{y+4}$	x

По условию задачи получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{x}{y+2} = 10, \\ \frac{x}{y} - \frac{x}{y+4} = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x(y+2) - xy = 10y(y+2), \\ x(y+4) - xy = 16y(y+4); \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 5y^2 + 10y - x = 0, \\ 4y^2 + 16y - x = 0, \end{cases}$$

$$y^2 - 6y = 0;\ y(y-6) = 0;$$

$y = 0$ — не удовлетворяет условию задачи;

$y = 6$, $x = 240$. Количество комплектов равно: $\frac{240}{16} = 15$, т. е. на один комплект идет 16 пешек.

Ответ: 15 комплектов.

Задачи на смеси и сплавы

Задача 14. Смешали 30 %-й и 10 %-й растворы соляной кислоты и получили 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение:

Поместим данные в таблицу.

	30 %-й раствор	**10 %-й раствор**	**15 %-й раствор**
Масса раствора	x г	y г	600 г
Масса кислоты в растворе	$0{,}3x$ г	$0{,}1y$ г	$0{,}15 \cdot 600 =$ $= 90$ г

Получим систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 600, \\ 0{,}3x + 0{,}1y = 90 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 3x + y = 900; \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 150, \\ y = 450; \end{matrix} \quad \begin{cases} x = 150, \\ y = 450. \end{cases}$$

Ответ: 150 г 30 %-го раствора и 450 г 10 %-го раствора.

Задача 15. Определить пробу сплава серебра с медью, зная, что сплавив его с 3 кг чистого серебра, получают сплав 900-й пробы, а сплавив его с 2 кг сплава 900-й пробы, получают сплав 840-й пробы.

Решение:

Пусть сплав содержит x кг серебра и y кг меди. Сплавив его с 3 кг чистого серебра, получим:

$$\frac{x+3}{x+y+3} = 0,900 \text{ или } x + 3 = 0,9x + 0,9y + 2,7; \ 0,1x - 0,9y = -0,3.$$

Сплавив его с 2 кг сплава 900-й пробы, получим чистого серебра ($x + 2 \times \times 0,900$), общий вес будет $(x + y + 2)$, значит:

$$\frac{x+1,8}{x+y+2} = 0,840 \text{ или } x + 1,8 = 0,84x + 0,84y + 1,68; \ 0,16x - 0,84y = -0,12.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,1x - 0,9y = -0,3, \\ 0,16x - 0,84y = -0,12; \end{cases} \quad x = 9y = -3; \ x = 9y - 3,$$

$$\text{тогда } 0,16(9y - 3) - 0,84y = -0,12; \ y = 0,6; \ x = 2,4.$$

Теперь масса сплава: $x + y = 2,4 + 0,6 = 3$ кг, проба его равна: $\frac{2,4}{3} = 0,8.$

Ответ: 800-я проба.

Задачи на комбинацию арифметической и геометрической прогрессий

При решении этих задач используют формулы для нахождения общего члена прогрессий и их свойства.

Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
a_n — член прогрессии, стоящий на n-месте. $a_n = a_1 + d(n - 1),$ где a_1 — первый член прогрессии; d — разность. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$ где a_{n-1} и a_{n+1} — члены прогрессии, стоящие соответственно перед и после a_n	b_n — член прогрессии, стоящий на n-месте. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$ где b_1 — первый член прогрессии; q — знаменатель. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1},$ где b_{n-1} и b_{n+1} — члены прогрессии, стоящие соответственно перед и после b_n

Задача 16. Сумма трех чисел равна 27. Эти числа составляют арифметическую прогрессию. Если из каждого числа соответственно вычесть 1, 3 и 2, то они составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение:

Пусть числа x, y и z составляют арифметическую прогрессию, тогда $y = \frac{x+z}{2}$ или $2y = x + z$, кроме того, сумма этих чисел равна 27, т. е. $x + y + z = 27$.

Если от этих чисел отнять 1, 3 и 2, получим геометрическую прогрессию, т. е. числа $x-1$, $y-3$ и $z-2$ обладают свойством: $(y-3)^2=(x-1)(z-2)$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=27, \\ x+z=2y, \\ (y-3)^2=(x-1)(z-2). \end{cases}$$

Из второго уравнения в первое уравнение вместо $x+z$ подставим $2y$, получим: $2y+y=27$; $y=9$. Тогда:

$$\begin{cases} x+9+z=27, \\ (9-3)^2=(x-1)(z-2); \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=18, \\ (x-1)(z-2)=36; \end{cases}$$

$$z=18-x;\ (x-1)(18-x-2)=36;$$
$$x^2-17x+52=0;\ x_1=13,\ x_2=4;$$
$$z_1=18-13=5,\ z_2=$$
$$=18-4=14.$$

Ответ: 13, 9, 5 или 4, 9, 14.

Задача 17. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если к каждому из них добавить соответственно 10, 11, 9 и 1, то новые числа составят арифметическую прогрессию.

Решение:

Пусть первый член геометрической прогрессии — x, а знаменатель — y. Тогда четыре члена геометрической прогрессии будут выглядеть так: x, xy, xy^2 и xy^3. Если к этим числам прибавить 10, 11, 9 и 1 соответственно, получим $x+10$; $xy+11$; xy^2+9; xy^3+1, это уже арифметическая прогрессия. Используем свойство $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ или $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(xy+11)=x+10+xy^2+9, \\ 2(xy^2+9)=xy+11+xy^3+1; \end{cases} \quad \begin{cases} xy^2-2xy+x=3, \\ xy^3-2xy^2+xy=6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y^2-2y+1)=3, \\ xy(y^2-2y+1)=6; \end{cases} \quad \begin{cases} xy(y-1)^2=6, \\ x(y-1)^2=3. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение почленно на второе, учитывая, что $x=0$ и $y=1$ не являются решениями системы:

$$\frac{xy(y-1)^2}{x(y-1)^2}=\frac{6}{3};$$

$$y=2.\ \ x=\frac{3}{(y-1)^2}=3.$$

Тогда имеем 4 члена геометрической прогрессии: 2; $2\cdot3$; $2\cdot3^2$; $2\cdot3^3$, т. е. 2; 6; 12; 24.
Ответ: 2; 6; 12; 24.

Задачи, в которых используется формула двузначного числа

Задача 18. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

Решение:

Пусть число имеет x десятков и y единиц.

Тогда искомое число имеет вид $10x + y$.

Из условия задачи следует, что $x^2 + y^2 = 13$ и $10x + y - 9 = 10y + x$ или $9x - 9y = 9$, т. е. $x - y = 1$. Получим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему способом подстановки, получаем $x = 3$, $y = 2$.

Ответ: 32.

Задачи, компонентами которых являются геометрические величины

Задача 19. Сумма диагоналей ромба 34 см, а его сторона — 13 см. Найти площадь ромба.

Решение:

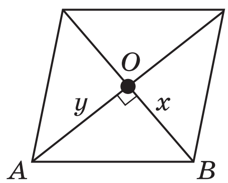


Рис. 3.57

Пусть половины диагоналей ромба — x см и y см. Тогда полусумма диагоналей $x + y = 34 : 2$; $x + y = 17$.

ΔAOB — прямоугольный, по теореме Пифагора: $x^2 + y^2 = 13^2$.

Получим систему:

$$\begin{cases} x + y = 17, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$$

Решив систему способом подстановки, получим: $x = 5$, $y = 12$.

Диагонали ромба 10 см и 24 см. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$ (см^2).

Ответ: 60 см^2.

Задача 20. Две силы приложены к одной точке и направлены под прямым углом. Величина одной из них на 4 Н больше другой, а величина равнодействующей силы на 8 Н меньше суммы величин данных сил. Найти величины данных сил и их равнодействующей.

Решение:

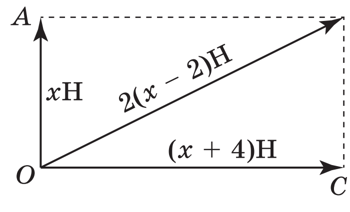


Рис. 3.58

Пусть первая сила — x Н, вторая — $(x + 4)$ Н, равнодействующая — $(x + x + 4) - 8 = (2x - 4)$ Н $= 2(x - 2)$ Н.

Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора $x^2 + (x + 4)^2 = 4(x - 2)^2$.

$x = 0$ — не удовлетворяет условию задачи, $x = 12$. Тогда первая сила — 12 Н, вторая — 16 Н, равнодействующая — $2(2x - 2) = 2 \cdot (2 \cdot 12 - 2) = 20$ Н.

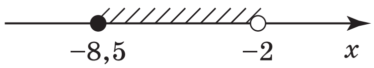
Ответ: 12 Н, 16 Н, 20 Н.

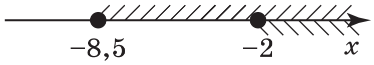
Тренировочные тестовые задания к разделу 3

1. Укажите количество корней уравнения $(2x + 3) = -1$.

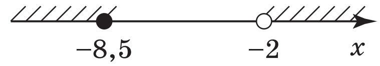
1) один 2) два 3) нет корней 4) три

2. На каком рисунке верно указано решение системы неравенств: $\begin{cases} 2x + 17 \le 0, \\ x + 3 > 1? \end{cases}$

1) 

2) 

3) 

4) 

3. Решите уравнение: $\frac{x}{5} + \frac{x}{9} = -\frac{14}{15}$.

1) -3 2) 1 3) 3 4) 7

4. На координатной прямой изображены числа a и c. Какое из указанных неравенств неверно?

1) $a + 16 > c + 15$

2) $a - 11 > c - 11$

3) $-2a + 3 < -2c + 3$

4) $\frac{1-a}{3} > \frac{1-c}{3}$

5. Укажите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства $-4x^2 + 4x + 17 \ge (x - 5)^2$.

1) 2 2) 1 3) 0 4) -1

6. Найдите сумму корней уравнения $\frac{10}{x-4} + \frac{4}{x-10} = 2$.

1) 21 2) 14 3) 7 4) 4

7. Укажите наименьшее натуральное число, являющееся решением неравенства $12x - 71 < 5$.

1) 6 2) 5 3) 2 4) 1

8. Запишите наибольшее из двух чисел, разность которых равна 3, а сумма квадратов — 25.

1) -1 2) -4 3) -5 4) -2

9. Если сторону квадрата увеличить на 2 см, то площадь полученного прямоугольника будет больше площади квадрата на 20 см^2. Найдите периметр прямоугольника.

1) 22 2) 40 3) 44 4) 48

10. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} (a+1)x + y = 3, \\ 2x - (a-2)y = 6 \end{cases}$ не имеет решений.

1) 0 2) 1 3) 0; 1 4) -1; 1

11. Сколько корней имеет уравнение $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$?

Ответ: ____________________.

12. Решите уравнение: $7 - 2x = 15 - 3(x - 3)$.

Ответ: ____________________.

13. Укажите наибольшее целое число, являющееся решением двойного неравенства $-1 \le 3 - 2x \le 2$.

Ответ: ____________________.

14. Решите систему уравнений: $\begin{cases} -x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

Ответ: ____________________.

15. Решите систему неравенств: $\begin{cases} -5x > -5, \\ 4x \ge 2. \end{cases}$

Ответ: ____________________.

16. Найдите стороны прямоугольника, периметр которого равен 30 см, а площадь — 56 см^2.

Ответ: ____________________.

17. Решите неравенство: $9x^2 - 19x + 37 \le 10x^2 - 26x + 49$.

Ответ: ____________________.

18. Найдите наименьший корень уравнения $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$.

Ответ: ____________________.

19. Катер за 1 ч прошел 12 км по течению реки и 9 км против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде 21 км/ч.

Ответ: ____________________.

20. Найдите область определения функции, заданной формулой: $y = \sqrt{3 - |x - 1|} - \dfrac{2}{x^2 - 1}$.

Ответ: ____________________.

4. Числовые последовательности

Знать:
- понятие числовой последовательности, задание рекуррентной формулой и формулой n-го члена;
- основные формулы для арифметической и геометрической прогрессий;
- понятие сложных процентов.

Уметь:
- вычислять члены последовательностей, заданных рекуррентной формулой и формулой n-го члена;
- распознавать арифметическую и геометрическую прогрессии при разных способах задания;
- решать задачи с использованием этих формул;
- рассматривать примеры из реальной жизни, иллюстрирующие изменение в арифметической и геометрической прогрессии;
- решать задачи на сложные проценты, в том числе из реальной практики.

4.1.1. Понятие последовательности

Числовая последовательность — это занумерованное множество чисел, расположенных в порядке возрастания номеров:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Число a_1 называют **первым членом** последовательности, a_2 — **вторым членом** последовательности и т. д., натуральное число n — его **номером**.

Из двух соседних членов последовательности a_k и a_{k+1} число a_{k+1} называют **последующим** по отношению к a_k, число a_{k-1} — **предыдущим** по отношению к a_k.

Последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ считается **заданной**, если известно правило, по которому можно определить любой ее член a_n, $n \in N$ (n — натуральное число).

Последовательности чаще всего задают двумя способами:

1) с помощью **формулы n-го члена**, т. е. формулы, которая позволит определить любой член последовательности по его номеру.

   Например, если последовательность задана формулой $x_n = x^2 + 1$, то пятый член последовательности $x_5 = 5^2 + 1 = 26$;

2) с помощью **рекуррентной формулы**, т. е. формулы, которая выражает любой член последовательности через предыдущий.

   Например, $a_{n+1} = a_n - 1{,}5$, тогда, если $a_1 = 17$, то $a_2 = 17 - 1{,}5 = 15{,}5$; $a_3 = 15{,}5 - 1{,}5 = 14$; $a_4 = 14 - 1{,}5 = 12{,}5$ и т. д.

Рекуррентно можно задать, например, последовательность Фибоначчи:

$$(a_n)\colon a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \text{ т. е.}$$
$$(a_n)\colon 1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 3;\ 5;\ 13;\ \ldots$$

Последовательности бывают **конечные** и **бесконечные**.

Последовательность называется **конечной**, если она имеет конечное число членов, например 3, 6, 9, 12. Конечной является последовательность однозначных натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Последовательность всех натуральных чисел **бесконечна**.

Последовательность называется **возрастающей**, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего:

$$x_{n+1} > x_n.$$

Например, последовательность 3, 6, 9, 12, ... $3n$, ... — возрастающая.

Последовательность называется **убывающей**, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего:

$$x_{n+1} < x_n.$$

Например, последовательности -3; -4; -5; -6; ... и 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{12}$; ... — убывающие.

Пример 1. Последовательность задана формулой n-го члена $c_n = -4n^2 + 7$. Найти:
а) седьмой член последовательности;
б) указать номер члена последовательности -393.

Решение:

а) $c_7 = -4 \cdot 7^2 + 7 = -189$;
б) $c_n = -393$, т. е. $-4n^2 + 7 = -393$; $-400n^2 = -400$; $n = \pm 10$, но $n = -10$ не может быть номером, номер — только натуральное число; $n = 10$.

Ответ: а) -189; б) 10.

Пример 2. Последовательность задана условием $b_1 = -5$, $b_{n+1} = -3 \cdot \frac{1}{b_n}$. Найти b_2.

Решение:

$$b_2 = -3 \cdot \frac{1}{b_1} = \frac{-3}{-5} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

Пример 3. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{19}{n+4}$. Сколько членов последовательности больше 2?

Решение:

Решим неравенство $\frac{19}{n+4} > 2$; $19 > 2n + 8$; $2n + 8 < 19$; $2n < 11$; $n < 5,5$, т. е. $n = 5$.

Ответ: 5.

Пример 4. Доказать, что последовательность, задаваемая формулой общего члена $x_n = \frac{3n-1}{5n+2}$, — возрастающая.

Решение:

Рассмотрим разность:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+2} - \frac{3n-1}{5n+2} = \frac{(3n+2)(5n+2)-(3n-1)(5n+7)}{(5n+7)(5n+2)} =$$

$$= \frac{15n^2 + 6n + 10n + 4 - 15n^2 - 21n + 5n + 7}{(5n+7)(5n+2)} = \frac{11}{(5n+7)(5n+2)} > 0,$$

поскольку n — натуральное число.

Последовательность возрастающая.

Пример 5. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ и условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Вычислить четвертый член последовательности.

Решение:

$$a_3 = a_1^2 - a_2 = 1^2 - 2 = -1; \quad a_4 = a_2^2 - a_3 = 3^2 - (-1) = 10.$$

Ответ: 10.

Пример 6. Последовательность задана формулой n-го члена. Записать $(n-1)$-й, $(n+1)$-й, $(n+5)$-й члены, если $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

Решение:

$$a_{n-1} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+2} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{2^2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$a_{n+1} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1+2} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = \frac{2^2}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+1}};$$

$$a_{n+5} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+5+2} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+7} = \frac{2^2}{2^{n+7}} = \frac{1}{2^{n+5}}.$$

4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

4.2.1. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена арифметической прогрессии

Арифметической прогрессией (АП) называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, к которому добавляют одно и то же число. Это число для данной последовательности называют **разностью** и обозначают d.

Первый член и разность прогрессии могут быть любыми числами.

Арифметическая прогрессия бывает:

- возрастающей, если разность $d > 0$;
- убывающей, если разность $d < 0$.

Например, прогрессия 1, 3, 5, 7, ... — возрастающая, $d = 2 > 0$; а прогрессия $-4, -7, -10, \ldots$ — убывающая, $d = -3 < 0$.

Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, если ее можно задать рекуррентной формулой:

$$a_{n+1} = a_n + d,\ n \in N, \text{ т. е. } d = a_{n+1} - a_n,\ n \in N.$$

Чтобы задать арифметическую прогрессию (АП), достаточно задать ее первый член и разность.

Основное соотношение для АП

Формула n-го члена:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d,\ n \in N}$$

Например, $a_{10} = a_1 + 9d$, $a_{21} = a_1 + 20d$, $a_{123} = a_1 + 122d$.

Характеристическое свойство АП

Любой член прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Признак АП

Если в последовательности выполняется заданное свойство, что любой член последовательности $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, то эта последовательность — арифметическая прогрессия.

Свойство двух членов АП

$$\boxed{a_k + a_l = a_n + a_m, \text{ если } k + l = n + m}$$

Например, $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_5 + a_7$, поскольку $1 + 10 = 2 + 9 = 5 + 7$.

Пример 1. Указать первый член и разность АП: 1, −5, −11, −17, ...

Решение:

$$a_1 = 1;\ d = a_2 - a_1 = -5 - 1 = -6.$$

Ответ: $a_1 = 1$; $d = -6$.

Пример 2. Записать первые пять членов АП, если $a_1 = -\sqrt{2}$; $d = 2\sqrt{2}$.

Решение:

$$a_2 = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2};\ \ a_3 = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2};$$

$$a_4 = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2};\ \ a_5 = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

Ответ: $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; $7\sqrt{2}$.

Пример 3. Найти разность АП, если $a_1 = -4$, $a_9 = 0$.

Решение:

$$a_9 = a_1 + 8d, \text{ т. е. } a_1 + 8d = 0;\ -4 + 8d = 0;\ 8d = 4;\ d = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 4. Найти формулу n-го члена АП, если $a_2 = -7$, $a_7 = 18$.

Решение:

Найдем a_1 и d:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d, \\ a_7 = a_1 + 6d; \end{cases} \text{ т. е. } \ -\begin{cases} a_1 + 6d = 18, \\ a_1 + d = -7, \end{cases} \qquad a_1 = -7 - d = -7 - 5 = -12.$$

$$5d = 25;\ d = 5;$$

Формула общего члена: $a_n = a_1 + d(n - 1) = -12 + 5(n - 1)$; $a_n = -12 + 5n - 5$.

Ответ: $a_n = 5n - 17$.

Пример 5. При каких n члены арифметической прогрессии 13, 11, 9, ... отрицательны?

Решение:

Запишем формулу общего члена АП:

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

где $a_1 = 13$, $d = 11 - 13 = -2$, тогда $a_n = 13 - 2(n - 1) = 13 - 2n + 2 = -2n + 15$.

Определим номер, начиная с которого члены прогрессии будут отрицательны:

$$-2n + 15 < 0;\ -2n < -15;\ n > 7{,}5,$$

т. е. начиная с $n = 8$ члены этой прогрессии будут отрицательны.

Пример 6. Найти первый член и разность АП, если $x_7 - x_3 = 24$, $x_3 \cdot x_5 = 64$.

Решение:

$x_7 = x_1 + 6d$; $x_3 = x_1 + 2d$; $x_5 = x_1 + 4d$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 6d - (x_1 + 2d) = 24, \\ (x_1 + 2d)(x_1 + 4d) = 64; \end{cases} \quad x_1 + 6d - x_1 - 2d = 24;\ 4d = 24;\ d = 6.$$

Подставим во второе уравнение: $(x_1 + 12)(x_1 + 24) = 64$; $x_1^2 + 36x_1 + 224 = 0$; $x_1 = -28$; $x_2 = -8$. Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x_1 = -28$; $d = 6$ или $x_1 = -8$; $d = 6$.

Пример 7. Найти a_7 и d в АП, если $a_6 = -2{,}3$; $a_8 = -2{,}8$.

Решение:

По характеристическому свойству:

$$a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2};\ \ a_7 = \frac{-2{,}3 - 2{,}8}{2} = -2{,}55;$$

$$d = a_7 - a_6 = -2{,}55 - (-2{,}3) = -0{,}25.$$

Ответ: $a_7 = -2{,}55$; $d = -0{,}25$.

Пример 8. Между числами 0,2 и 2,6 вставить пять чисел так, чтобы эти числа образовали АП.

Решение:

$a_1 = 0{,}2$. Если вставим еще пять чисел, то $a_7 = 2{,}6$.

$$a_7 = a_1 + 6d;\ 0{,}2 + 6d = 2{,}6;\ 6d = 2{,}4;\ d = 0{,}4.$$

Тогда получаем прогрессию:

$$0{,}2;\ 0{,}6;\ 1;\ 1{,}4;\ 1{,}8;\ 2{,}2 \text{ и } 2{,}6.$$

Пример 9. В первом ряду кинотеатра 30 мест, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в 7-м ряду, в ряду под номером n?

Решение:

Очевидно, что количество мест в каждом ряду образуют арифметическую прогрессию с $a_1 = 30$, $d = 2$. Тогда в 7-м ряду будет: $a_7 = a_1 + 6d = 30 + 6 \cdot 7 = 72$ (места).

В ряду с номером n: $a_n = a_1 + d(n-1) = 30 + 6(n-1) = 6n + 24$ (места).

Ответ: 72 места; $(6n + 24)$ места.

Пример 10. Свободно падающее тело проходит за первую секунду 4,8 м, а в каждую последующую секунду — на 9,8 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние пройдет тело за седьмую секунду?

Решение:

Имеем арифметическую прогрессию: $a_1 = 4{,}8$; $d = 9{,}8$; $n = 7$. Тогда $a_7 = a_1 + 6d = 4{,}8 + 6 \cdot 9{,}8 = 63{,}6$ (м).

Ответ: 63,6 м.

Пример 11. Девушка в солярии загорала первый день 3 мин, а каждый последующий день увеличивала свое пребывание в солярии на 2 мин. Сколько процедур она прошла, если в последний день загорала 11 мин?

Решение:

Время пребывания в солярии составляет АП, где $a_1 = 3$; $d = 2$; $a_n = 11$.

Тогда $a_n = a_1 + d(n-1)$, т. е. $3 + 2(n-1) = 11$; $n = 5$.

Ответ: 5 процедур.

Члены последовательности можно изображать точками на координатной плоскости. Для этого на горизонтальной оси откладывают номер члена последовательности, а по вертикальной — соответствующий член последовательности.

Пример 12. На рис. 4.1 изображены точками первые семь членов арифметической прогрессии. Найти a_1, d, a_4 и a_7.

Решение:

Очевидно, что $a_1 = -3$, $a_2 = -1{,}5$, тогда:

$d = a_2 - a_1 = -3 - (-1{,}5) = -1{,}5$; $a_4 = 1{,}5$; $a_7 = 6$.

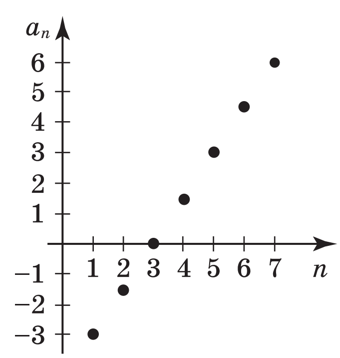


Рис. 4.1

4.2.2. Формула суммы первых нескольких членов арифметической прогрессии

Сумма членов конечной арифметической прогрессии равна полусумме ее крайних членов, умноженной на число членов:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}} \quad \text{или} \quad \boxed{S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n}$$

Например, $S_7 = \dfrac{(a_1 + a_7)\cdot 7}{2}$ или $S_7 = \dfrac{2a_1 + 6d}{2}\cdot 7$.

Пример 1. Найти сумму первых одиннадцати членов АП, если $a_1 = 0{,}5$; $d = -2$.

Решение:

$$S_{11} = \frac{(2a_1 + 10d)\cdot 11}{2} = (a_1 + d)\cdot 11 = (0{,}5 - 2)\cdot 11 = -16{,}5.$$

Ответ: $-16{,}5$.

Пример 2. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма равнялась 210?

Решение:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 210.\ a_1 = 1,\ d = 1,\ a_n = n.$$

$S_n = 210$; $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2}\cdot n$; $\dfrac{(1+n)n}{2} = 210$; $n^2 + n - 420 = 0$; $n_1 = -21$ — не удовлетворяет условию задачи; $n_2 = 20$.

Ответ: 20.

Пример 3. Найти сумму натуральных чисел не больше 100, которые при делении на 5 дают остаток 1.

Решение:

Натуральные числа, которые при делении на 5 дают остаток 1, — это 1, 6, 11, ..., т. е. $a_1 = 1$, $d = 5$. $a_n = 1 + 5(n - 1)$; $a_n = 5n - 4$. Найдем количество членов прогрессии, не превышающих 100:

$$5n - 4 \le 100;\ 5n \le 104;\ n \le \frac{104}{5} = 20{,}8.$$

То есть нужно искать сумму первых 20 членов АП:

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2}\cdot 20 = (2a_1 + 19d)\cdot 10 = (2 + 19\cdot 5)\cdot 10 = 970.$$

Ответ: 970.

Пример 4. Найти x из уравнения $1 + 5 + 9 + \ldots + x = 435$.

Решение:

Очевидно, что сумма членов АП, где $a_1 = 1$, $d = 5 - 1 = 4$, равна 435. Нужно найти последний член этой конечной прогрессии. $x = a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Тогда $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$; $\dfrac{2 + 4(n-1)}{2}\cdot n = 435$;

$n(2n - 1) = 435$; $2n^2 - n - 435 = 0$; $n_1 = -14{,}5$ — не удовлетворяет условию задачи, $n \in N$; $n = 15$. $x = a_{15} = a_1 + 14d = 1 + 14\cdot 4 = 57$.

Ответ: 57.

Пример 5. В арифметической прогрессии (x_n): $x_4 + x_2 - x_3 = 4$; $x_5 + x_3 = 20$. Найти сумму девяти первых членов прогрессии.

Решение:

$$x_4 = x_1 + 3d;\ x_2 = x_1 + d;\ x_3 = x_1 + 2d;\ x_5 = x_1 + 4d.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3d + x_1 + d - x_1 - 2d = 4, \\ x_1 + 4d + x_1 + 2d = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2d = 4, \\ x_1 + 3d = 10; \end{cases} \quad -\begin{cases} x_1 + 3d = 10, \\ x_1 + 2d = 4; \end{cases} \quad x_1 + 12 = 4;\ x_1 = -8.$$

$$d = 6;$$

Тогда $S_9 = \dfrac{2x_1 + 8d}{2} \cdot 9 = (x_1 + 4d) \cdot 9 = (-8 + 4 \cdot 6) \cdot 9 = 144.$

Ответ: 144.

Пример 6. В арифметической прогрессии $a_3 + a_{11} = 12$. Найти S_{13}.

Решение:

$S_{13} = \dfrac{(a_1 + a_{13}) \cdot 13}{2}$. По свойству двух членов АП $a_1 + a_{13} = a_3 + a_{11}$, поскольку $1 + 13 = 3 + 11$. $S_{13} = \dfrac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78.$

Ответ: 78.

Пример 7. Найти a_1 и d арифметической прогрессии, если $S_5 = 65$ и $S_{10} = 230$.

Решение:

$$S_5 = \frac{(2a_1 + 4d) \cdot 5}{2}; \quad S_{10} = \frac{(2a_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 230.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_1 + 2d) \cdot 5 = 65, \\ (2a_1 + 9d) \cdot 5 = 230; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 2d = 13, \\ 2a_1 + 9d = 46; \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 2a_1 + 9d = 46, \\ 2a_1 + 4d = 26, \end{cases}$$

$$5d = 20;\ d = 4.$$

$$a_1 + 2d = 13;\ a_1 + 8 = 13;\ a_1 = 5.$$

Ответ: $a_1 = 5$; $d = 4$.

Пример 8. Для асфальтирования участка длиной 99 м используются два катка. Первый каток был установлен в одном конце участка, второй — в противоположном. Работать они начали одновременно. За первую минуту второй каток прошел 1,5 м, а за каждую последующую — на 0,5 м больше, чем за предшествующую. Первый каток каждую минуту проходил 5 м. Через сколько минут оба катка встретятся?

Решение:

Пусть два катка встретились через x минут.

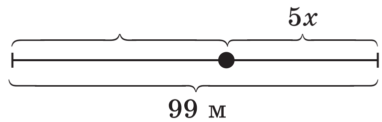


Рис. 4.2

Движение первого катка проходит по законам арифметической прогрессии, где $a_1 = 1{,}5$; $d = 0{,}5$. Нужно найти сумму x членов этой прогрессии, поскольку двигался каток x мин:

$a_n = a_1 + d(n - 1) = 1{,}5 + 0{,}5(x - 1) = 0{,}5x + 1.$

Первый каток пройдет расстояние:

$$S_x = \frac{(a_1 + a_n) \cdot x}{2} = \frac{(1{,}5 + 0{,}5x + 1) \cdot x}{2} = \frac{(2{,}5 + 0{,}5x) \cdot x}{2}.$$

Второй каток до встречи пройдет расстояние $5x$, поскольку движется x мин со скоростью 5 м/мин.

Все расстояние — 99 м, получим уравнение:

$$\frac{(2,5+0,5x)\cdot x}{2}+5x=99;\ 0{,}5x^2+2{,}5x+10x=198;\ x^2+25x-396=0;$$

$x_1=-36$ — не удовлетворяет условию задачи; $x_2=11$.

Ответ: через 11 минут.

4.2.3. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена геометрической прогрессии

Геометрической прогрессией (ГП) называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число, не равное нулю.

Это постоянное для данной последовательности число называется **знаменателем** последовательности и обозначается q.

Геометрические прогрессии бывают **возрастающие**, **убывающие**, **конечные** и **бесконечные**.

Например,

1, 3, 9, 27, ... — бесконечная возрастающая ГП ($q=3>1$);

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ ...$ — бесконечно убывающая ГП $\left(q=\frac{1}{2}<1\right)$;

3, 12, 48 — конечная прогрессия, $q=4$.

Формула *n*-го члена ГП

$$\boxed{b_n=b_1\cdot q^{n-1}}$$

Например, $b_5=b_1\cdot q^4$; $b_7=b_1\cdot q^6$.

Характеристическое свойство ГП

Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов.

Например, $b_3^2=b_2\cdot b_4$; $b_{100}^2=b_{99}\cdot b_{101}$; $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$.

Признак геометрической прогрессии

$$\boxed{b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$$

Если члены некоторой последовательности, начиная со второго, удовлетворяют свойству $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, то эта последовательность — геометрическая прогрессия.

Характеристическое свойство можно обобщить:

$$\boxed{a_n^2=a_{k-n}\cdot a_{k+n},\ k\in N,\ n\in N}$$

Свойство двух членов геометрической прогрессии

$$\boxed{a_k\cdot a_l=a_n\cdot a_m,\ \text{если}\ k+l=n+m}$$

Например, $a_{10}\cdot a_2=a_5\cdot a_7$, т. е. $10+2=5+7$.

Пример 1. Найти первый член и знаменатель ГП: а) 3, 12, 36, ...; б) 3, $-3\sqrt{2}$, 6, ...

Решение:

а) $b_1=3$; $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{12}{3}=4$; б) $b_1=3$; $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{-3\sqrt{2}}{3}=-\sqrt{2}$.

Ответ: а) $b_1=3$, $q=4$; б) $b_1=3$, $b_2=-\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти первые пять членов ГП, если: а) $b_1 = 2$, $q = -2$; б) $b_1 = \sqrt{3}$, $q = \sqrt{2}$.

Решение:

а) $b_2 = 2 \cdot (-2) = -4$; $b_3 = -4 \cdot (-2) = 8$; $b_4 = 8 \cdot (-2) = -16$; $b_5 = -16 \cdot (-2) = 32$;

б) $b_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$; $b_3 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $b_4 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$;

$b_5 = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: а) 2, −4, 8, −16, 32; б) $\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $2\sqrt{6}$; $4\sqrt{3}$.

Пример 3. Найти b_4, если $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{4}$.

Решение:

$$b_4 = b_1 q^3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}.$$

Ответ: $\frac{1}{32}$.

Пример 4. Записать формулу n-го члена ГП: 3; −4; $\frac{16}{3}$; ...

Решение:

$$b_1 = 3;\ q = -\frac{4}{3};\ q_n = b_1 q^{n-1} = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1} = -\frac{4^{n-1} \cdot 3}{3^{n-1}} = -\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}.$$

Пример 5. Прогрессия задана числами: −1, 2, −4, ... Найти номер члена ГП, если он равен 128.

Решение:

$$b_1 = -1;\ q = -2;\ b_n = 128.\ b_n = b_1 \cdot q^{n-1};\ -1 \cdot (-2)^{n-1} = 128;$$
$$(-2)^{n-1} = -128;\ (-2)^{n-1} = (-2)^7;\ n - 1 = 7;\ n = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 6. Найти b_7 геометрической прогрессии, если $b_6 = -5$, $b_8 = -125$.

Решение:

По свойству ГП: $b_7^2 = b_6 \cdot b_8$, тогда $b_7^2 = (-5) \cdot (-125) = 625$; $b_7 = 25$ или $b_7 = -25$.

Ответ: 25 или −25.

Пример 7. Найти b_1 и q геометрической прогрессии, если $b_6 = 96$, $b_9 = 768$.

Решение:

$b_6 = b_1 \cdot q^5$; $b_9 = b_1 \cdot q^8$. Получим систему уравнений: $\begin{cases} b_1 q^8 = 768, \\ b_1 q^5 = 96. \end{cases}$

Разделим соответственные части уравнений:

$$\frac{b_1 q^8}{b_1 q^5} = \frac{768}{96};\ q^3 = 8;\ q = 2.\ b_1 = \frac{96}{q^5} = \frac{96}{2^5} = \frac{96}{32} = 3.$$

Ответ: $b_1 = 3$; $q = 2$.

Пример 8. Найти четыре последовательных члена ГП, из которых второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

Решение:

Пусть b_1, b_2, b_3, b_4 — четыре последовательных члена ГП. Условие задачи можно записать так: $\begin{cases} b_1 - 35 = b_2, \\ b_3 - 560 = b_4. \end{cases}$

Используя формулу общего члена, эту систему перепишем в виде:

$$\begin{cases} b_1 - b_1 q = 35, \\ b_1 q^2 - b_1 q^3 = 560; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b_1 q^2 (1-q) = 560, \\ b_1 (1-q) = 35; \end{cases} \quad q \neq 1,\ b_1 \neq 0.$$

$$\frac{b_1 q^2 (1-q)}{b_1 (1-q)} = \frac{560}{35};\ q^2 = 16;\ q = 4 \text{ или } q = -4.$$

Если $q = 4$, то $b_1 = \frac{35}{1-q} = \frac{35}{1-4} = -\frac{35}{3}$; если $q = -4$, то $b_1 = \frac{35}{1-q} = \frac{35}{1+4} = 7$.

Тогда первые четыре члена последовательности:

$$-\frac{35}{3};\ -\frac{35 \cdot 4}{3};\ -\frac{35 \cdot 16}{3} \text{ и } -\frac{35 \cdot 64}{3} \text{ или } 7;\ -28;\ 112;\ -448.$$

Ответ: $-\frac{35}{3}$; $-\frac{140}{3}$; $-\frac{560}{3}$; $-\frac{2\,240}{3}$ или 7; −28; 112; − 448.

4.2.4. Формула суммы первых членов геометрической прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Сумму *n* членов геометрической прогрессии вычисляют по формулам:

$$\boxed{S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}}$$

Удобно использовать при $q > 1$.

$$\boxed{S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1-q}}$$

Удобно использовать при $q < 1$.

Если $q = 1$, то все члены ГП равны и $S_n = n \cdot b_1$.

Пример 1. Найти сумму первых шести членов ГП, если:

а) $b_1 = 2$; $q = -\frac{1}{2}$;

б) ГП задана последовательностью чисел: −5; $\frac{10}{3}$; $-\frac{20}{9}$...

Решение:

а) $S_6 = \frac{b_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{64}\right)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 63}{3 \cdot 64} = \frac{21}{16}$;

б) $b_1 = -5$; $q = \frac{10}{3} : (-5) = -\frac{10}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{3}$.

$$S_6 = \frac{b_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{-5 \cdot \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^6\right)}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-5 \cdot \left(1 - \frac{64}{729}\right)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-5 \cdot 3 \cdot 665}{5 \cdot 729} = -\frac{665}{243}.$$

Ответ: а) $\frac{21}{16}$; б) $-\frac{665}{243}$.

Пример 2. Найти сумму членов ГП, если $b_3 = 18$, $b_6 = 484$, $n = 7$.

Решение:

$b_3 = b_1 \cdot q^2$; $b_6 = b_1 \cdot q^5$. Получим систему уравнений:

$\begin{cases} b_1q^5 = 486, \\ b_1q^2 = 18; \end{cases}$ $\dfrac{b_1q^5}{b_1q^2} = \dfrac{486}{18}$; $q^3 = 27$; $q = 3$ ($b_1 \neq 0$, $q \neq 0$). Тогда $b_1 = \dfrac{18}{q^2} = \dfrac{18}{9} = 2.$

$$S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{2(3^7 - 1)}{3 - 1} = 2\ 186.$$

Ответ: 2 186.

Пример 3. Найти сумму членов ГП, если $b_n = 384$, $q = 2$, $n = 8$.

Решение:

$b_8 = b_1 \cdot q^7$, тогда $b_1 \cdot q^7 = 384$; $b_1 = \dfrac{384}{2^7} = \dfrac{384}{128} = 3$; $S_8 = \dfrac{b_8q - b_1}{q - 1} = \dfrac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765.$

Ответ: 765.

Пример 4. Первый член ГП (x_n) равен 2, третий — 18. Сколько первых членов необходимо взять, чтобы сумма равнялась 242?

Решение:

Имеем $x_3 = 18$; $x_1 = 2$; $x_3 = x_1 \cdot q^2$; $q^2 = \dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{18}{2} = 9$; $q = 3$ или $q = -3$.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}; \ S_n = 242.$$

Если $q = 3$, то $\dfrac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 242$; $3^n = 243$; $n = 5$;

если $q = -3$, то $\dfrac{2((-3)^n - 1)}{-3 - 1} = 242$; $(-3)^n = -487$.

Не существует натурального n, удовлетворяющего этому равенству.

Ответ: 5.

Пример 5. Сумма первого и третьего членов ГП равна 15, а сумма второго и четвертого — 30. Найти сумму первых десяти ее членов.

Решение:

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = 15, \\ b_2 + b_4 = 30; \end{cases} \begin{cases} b_1 + b_1q^2 = 15, \\ b_1q + b_1q^3 = 30; \end{cases} \begin{cases} b_1(1 + q^2) = 15, \\ b_1q(1 + q^2) = 30. \end{cases}$$

Разделим почленно второе уравнение на первое, $q = 2$.

Подставим $q = 2$ в первое уравнение:

$$b_1 = \frac{15}{1 + q^2} = 3; \ S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3\ 069.$$

Ответ: 3 069.

Пример 6. Доказать тождество: $(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) = x^n - 1$, где $n \in N$, $n > 1$.

Доказательство:

Рассмотрим второй множитель $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$. Очевидно, что сумма членов геометрической прогрессии, которую можно записать в виде $1 + x + x^2 + \ldots x^{n-2} + x^{n-1}$, где первый член $b_1 = 1$; $q = x$, количество членов равно n:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (x^n - 1)}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Подставим это выражение в левую часть равенства:

$$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)=(x-1)\cdot\frac{x^n-1}{x-1}=x^n-1 \text{ (при } x\neq 1),$$

что и требовалось доказать.

Если $x = 1$, то равенство превращается в тождество вида $0 = 0$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой по модулю меньше единицы ($|q| < 1$), называется **бесконечно убывающей геометрической прогрессией.**

Например, $1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \ldots;\ q=\frac{1}{3};$

$1;\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2\sqrt{2}};\ \ldots;\ q=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число, к которому приближается сумма n первых членов прогрессии, если n бесконечно увеличивается.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\boxed{S=\frac{b_1}{1-q},\ |q|<1}$$

Пример 7. Найти сумму бесконечно убывающей ГП $-4;\ -2;\ -1;\ \ldots$

Решение:

$$b_1=-4;\ q=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2};\ S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{-4}{1-\frac{1}{2}}=-8.$$

Ответ: 8.

Пример 8. Найти второй член бесконечно убывающей ГП, знаменатель которой равен $\frac{1}{3}$, а сумма прогрессии — 72.

Решение:

$$S=\frac{b_1}{1-q};\ b_1=S(1-q)=72\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=48;\ b_2=48\cdot\frac{1}{3}=16.$$

Ответ: 16.

Пример 9. Упростить выражение: $\frac{1+y+y^2+y^3+\ldots}{1+y^3+y^6+y^9+\ldots}$, где $0<y<1$.

Решение:

Числитель дроби представляет собой бесконечно убывающую ГП, где $b_1=1$, $q=y$, тогда $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-y}$. Аналогично знаменатель представим в виде $\frac{1}{1-y^3}$; тогда исходная дробь равна $\frac{1}{1-y}:\frac{1}{1-y^3}=\frac{(1-y)(1+y+y^2)}{(1-y)}=y^2+y+1.$

Ответ: y^2+y+1.

Пример 10. Решить уравнение: $2x+1+x^2-x^3+x^4+x^5+\ldots=\dfrac{13}{6}$, где $|x|<1$.

Решение:

Сумма $x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$, где $|x| < 1$ — это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1 = x^2$, $q = -x$, $|q| < 1$. Тогда эта сумма равна:

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{x^2}{1+x}.$$

Получим уравнение: $2x+1+\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{16}{3}$, $x \neq -1$.

$$6(2x + 1)(x + 1) + 6x^2 = 13(x + 1);\ 18x^2 + 5x - 7 = 0;\ x_1=-\frac{7}{8};\ x_2=\frac{1}{2}.$$

Оба корня удовлетворяют условию $|x| < 1$.

Ответ: $-\dfrac{7}{8}$ и $\dfrac{1}{2}$.

Пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, можно записывать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде десятичной.

Пример 11. Записать число 0,(6) в виде обыкновенной дроби.

Решение:

$$0,(6) = 0,666\ldots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \ldots$$

Слагаемые 0,6; 0,06; 0,006 — члены бесконечно убывающей ГП с первым членом 0,6 и знаменателем $q = 0,1$ ($|q| < 1$).

Сумма $S=\dfrac{0,6}{1-0,1}=\dfrac{0,6}{0,9}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$. Значит, $0,(6)=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $0,(6)=\dfrac{2}{3}$.

Пример 12. Записать бесконечную десятичную дробь 5,4(23) в виде обыкновенной дроби.

Решение:

$$5,4(23) = 5,4 + 0,023 + 0,00023 + \ldots$$

Слагаемые 0,023; 0,00023; ... — члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $b_1 = 0,023$ и $q = 0,01$ ($|q| < 1$).

Сумма этой прогрессии:

$$S=\frac{0,023}{1-0,01}=\frac{0,023}{0,99}=\frac{23}{990};\text{ поэтому: } 5+\frac{4}{10}+\frac{23}{990}=5+\frac{396+23}{990}=5\frac{419}{990}.$$

Ответ: $5,4(23)=5\dfrac{419}{990}$.

4.2.5. Сложные проценты

Понятие **сложного процента** встречается при увеличении (уменьшении) числа на p % несколько раз (ежегодно, ежемесячно, ежедневно) без изъятия прироста, т. е. каждый год начисляется процент с учетом наращенной величины.

Формулы сложных процентов приходится использовать бухгалтерам и работникам банков. Кроме того, формулу используют для определения численности населения страны или города, роста поголовья скота и т. д.

Решение задач на сложные проценты основано на использовании следующих понятий и формул.

Пусть некоторая переменная величина A, зависящая от времени t, в начальный момент $t = 0$ имеет значение A_0, а в некоторый момент времени t_1 имеет значение A_1.

Абсолютным приростом величины A за время t_1 называется разность $A_1 - A_0$.

Относительным приростом величины A за время t_1 называется отношение:

$$\frac{A_1 - A_0}{A_0}.$$

Процентным приростом величины A за время t_1 называется:

$$p\,\% = \frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\,\%.$$

Таким образом, вложенный начальный капитал A_0 под $p\,\%$ годовых через n лет превратится в наращенный капитал A_n: $A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Вычислять сложные проценты удобно с помощью таблицы, если ввести коэффициент увеличения k.

Ежегодное увеличение на p % $\left(k = 1 + \frac{p}{100}\right)$

	1-й год	**2-й год**	**3-й год**	**...**	**n-й год**
Было	a	ka	k^2a		
Возросло за год	$\frac{p}{100} \cdot a$	$\frac{p}{100} \cdot ka$	$\frac{p}{100} \cdot k^2a$		
Стало	$\left(1 + \frac{p}{100}\right)a = ka$	$\left(1 + \frac{p}{100}\right)ka = k^2a$	k^3a		k^na

Ежегодное уменьшение на p % $\left(k = 1 - \frac{p}{100}\right)$

	1-й год	**2-й год**	**3-й год**	**...**	**n-й год**
Было	a	ka	k^2a		
Уменьшилось за год	$\frac{p}{100} \cdot a$	$\frac{p}{100} \cdot ka$	$\frac{p}{100} \cdot k^2a$		
Стало	$\left(1 - \frac{p}{100}\right)a = ka$	$\left(1 - \frac{p}{100}\right)ka = k^2a$	k^3a		k^na

Пример 1. Начальный вклад в банк составил 3 000 рублей. За год начислялось 12 % годовых. Найти сумму вклада через 5 лет.

Решение:

Вычислим сумму вклада по формуле: $A_0 = 3\,000$; $p = 12$; $n = 5$.

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \quad A_n = 3\,000\left(1 + \frac{12}{100}\right)^5 = 3\,000 \cdot 1{,}12^5 \approx 5\,287{,}03.$$

Ответ: 5 287 рублей 03 копеек.

Пример 2. Предприятие работало три года. Производство продукции за второй год работы предприятия возросло на p %, а на следующий год оно стало на 10 % больше, чем в предыдущий. Определить, на сколько процентов увеличилось производство за второй год, если известно, что за два года оно увеличилось в общей сложности на 48,59 %.

Решение:

Обозначим количество продукции, произведенной за первый, второй и третий годы работы предприятия, соответственно через A_1, A_2 и A_3. По условию задачи за второй год процентный прирост составил p %, а за третий — $(p + 10)$ %. В соответствии с определением процентного прироста эти условия дают два уравнения:

$$\frac{A_2 - A_1}{A_1} \cdot 100\ \% = p\ \%;$$

$$\frac{A_3 - A_2}{A_2} \cdot 100\ \% = (p + 10)\ \%.$$

По условию задачи производство за два года возросло на 48,59 %, т. е. в третий год предприятие производило на 48,59 % продукции больше, чем в первый год. Это условие можно записать в виде: $\frac{A_3 - A_1}{A_1} \cdot 100\ \% = 48{,}59\ \%$.

Запишем полученные уравнения в виде следующей системы:

$$\begin{cases} A_2 = A_1\left(1 + \dfrac{p}{100}\right); \\ A_3 = A_2\left(1 + \dfrac{p+10}{100}\right); \\ A_3 = A_1\left(1 + \dfrac{48{,}59}{100}\right). \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на второе:

$$A_3 = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p+10}{100}\right).$$

Из полученного уравнения и третьего уравнения системы получаем уравнение для нахождения неизвестной величины p:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p+10}{100}\right)1 + \frac{48{,}59}{100};\ p^2 + 210p - 3\ 859 = 0.$$

Корни уравнения $p_1 = 17$ и $p_2 = -227$ (не подходит по смыслу задачи).

Ответ: 17 %.

Пример 3. Телевизор в начале года стоит 15 200 рублей. По условиям акции, если он не продается, его цена через год уменьшается на 5 %. Сколько будет стоить телевизор через 3 года, если он не будет продан?

Решение:

$$A_0 = 15\ 200;\ p = 5\ \%;\ n = 3.$$

Используем формулу ежегодного уменьшения на p %.

$$A_n = A_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n = 15\,200 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^3 = 15\,200 \cdot 0{,}95^3 = 13\ 032{,}1.$$

Ответ: 13 032 рублей 10 копеек.

Тренировочные тестовые задания к разделу 4

1. Последовательность задана формулой $c_n = -4n^2 + 3$. Какое из указанных чисел является членом этой последовательности?
1) -2 2) -15 3) -33 4) -99

2. Три последовательности, среди которых есть арифметическая и геометрическая прогрессия, заданы несколькими первыми членами. Укажите для каждой последовательности соответствующее ей утверждение.

А) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; 0; $-\frac{1}{4}$; ...
Б) 1; -4; 16; -64; ...
В) $-0{,}5$; 1; 2; -4; ...

1) Последовательность не является ни арифметической, ни геометрической прогрессией.
2) Последовательность является арифметической прогрессией.
3) Последовательность является геометрической прогрессией.

Ответ:

А	Б	В

3. Арифметические прогрессии (a_n), (b_n) и (c_n) заданы формулами n-го члена: $a_n = 4n + 7$; $b_n = 4n$; $c_n = 3n - 1$. Укажите те из них, у которых разность d равна 4.
1) (a_n) и (c_n) 2) (c_n) 3) (a_n) и (b_n) 4) (b_n) и (c_n)

4. Сколько необходимо взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма была равна 210?
1) 20 2) 21 3) 24 4) 105

5. Вычислите сумму всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.
1) $\frac{5}{3}$ 2) 2,5 3) 10,5 4) 15,5

6. Геометрическая прогрессия задана условиями: $b_n = 7 \cdot 3^{n-1}$. Какое из данных чисел не является членом этой прогрессии?
1) 7 2) 14 3) 21 4) 63

7. Укажите обыкновенную дробь, равную бесконечной периодической десятичной дроби 3,8(3).
1) $3\frac{3}{8}$ 2) $3\frac{83}{100}$ 3) $3\frac{1}{6}$ 4) $3\frac{5}{6}$

8. В понедельник некоторый товар поступил в продажу по цене 800 рублей. В соответствии с принятыми в магазине правилами, цена товара в течение недели остается неизменной, а в первый день каждой следующей недели снижается на 20 % от предыдущей цены. Сколько рублей будет стоить товар на семнадцатый день после поступления в продажу?
1) 512 руб. 2) 480 руб. 3) 760 руб. 4) 584 руб.

9. Строительная фирма положила в банк 300 тысяч рублей. За год начисляется 10 % годовых. Сумма вклада через пять лет составит:
1) 350 тыс. руб. 2) 483 тыс. руб. 3) 315 тыс. руб. 4) 375 тыс. руб.

10. Четвертый член геометрической прогрессии составляет 25 % от шестого члена этой прогрессии, а сумма второго и пятого членов прогрессии равна 216. Найдите сумму первых четырех членов прогрессии, если $q > 0$.
1) 144 2) 180 3) 192 4) 216

11. Найдите пятидесятый член арифметической прогрессии, если ее первый член равен 1,1, а разность 2.
Ответ: ____________________.

12. Найдите седьмой член геометрической прогрессии, если ее первый член равен 6, а знаменатель $\frac{1}{2}$.
Ответ: ____________________.

13. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: -4; $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{9}\ldots$
Ответ: ____________________.

14. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 13{,}2$; $a_{15} = -24{,}6$. Найдите разность арифметической прогрессии.
Ответ: ____________________.

15. В геометрической прогрессии (x_n) $x_3 = \frac{1}{9}$; $x_6 = 3$. Найдите знаменатель прогрессии.
Ответ: ____________________.

16. Арифметическая прогрессия задана условием $a_n = 10 - 2{,}9n$. Найдите сумму первых десяти членов прогрессии.
Ответ: ____________________.

17. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условием $b_n = \frac{3}{8}\cdot(2)^n$. Найдите сумму первых пяти членов прогрессии.
Ответ: ____________________.

18. В геометрической прогрессии с положительными членами $S_2 = 4$, $S_3 = 13$. Найдите S_4.
Ответ: ____________________.

19. Решите уравнение: $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + x = 155$.
Ответ: ____________________.

20. Три числа, из которых третье равно 12, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Если вместо 12 взять 9, то эти три числа будут тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите эти числа.
Ответ: ____________________.

5. Функции

Знать:
- понятие функции;
- область определения, множество значений;
- способы задания функции;
- понятие о графике линейной функции, функциях $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$;
- промежутки возрастания, убывания функции, нули функции, промежутки сохранения знака.

Уметь:
- вычислять значение функции по формулам;
- строить графики по точкам, описывать их свойства по графику;
- интерпретировать графики реальных зависимостей;
- показывать схематическое расположение на координатной плоскости графиков функций: $y = kx + b$, $y = \dfrac{k}{a}$; $y = ax^2$; $y = ax^2 + c$; $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от значений коэффициентов;
- строить графики изучаемых функций.

5.1. Числовые функции

5.1.1. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции

Зависимости одной переменной от другой назначаются **функциональными зависимостями.**

Если каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной, то такая зависимость называется **функциональной зависимостью**, или **функцией.**

Независимую переменную называют также **аргументом.** Аргумент принято обозначать буквой x.

Зависимую переменную называют **функцией**, ее обозначают y или f. Записывают: $y(x)$ или $f(x)$.

Например, $f(x) = 3 - x$ или $y(x) = x^2 + 3x - 1$ — функции.

Область определения функции — все значения, которые принимает аргумент. Область определения функции принято обозначать $D(f)$.

Например, рассмотрим функцию — зависимость площади квадрата от его стороны: $S(a) = a^2$. Область определения этой функции — множество всех положительных чисел.

Область значения функции — множество тех значений, которые может принимать сама функция при всех значениях аргумента из области определения. Множество значений функции принято обозначать $E(f)$.

Пример 1. Поезд движется со скоростью 70 км/ч. За t ч он проходит расстояние s км. Задать формулой зависимость s от t. Найти значение функции при значении аргумента, равном 3 ч, 5 ч.

Решение:

Очевидно, что данная зависимость имеет вид: $s = 70t$.

Если $t = 3$ ч, то $s = 70 \cdot 3 = 210$ км.

Если $t = 7$ ч, то $s = 70 \cdot 7 = 490$ км.
Ответ: $s = 70t$; 210 км; 490 км.

Области определения основных элементарных функций:

1. Область определения любого многочлена — R (множество всех действительных чисел).
2. Область определения $D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. $D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0; +\infty)$; $D\left(\sqrt[2R+1]{x}\right) = R$.

Области значений основных элементарных функций

Областью значений всякого многочлена четной степени является промежуток $[m; +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty; n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Способы задания функции

Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно было бы найти соответствующее значение функции. Существуют четыре основных способа задания функции:

1) аналитический;
2) графический;
3) табличный;
4) словесное описание.

1. **Аналитический способ задания функции.** При аналитическом способе функция задается с помощью формулы $y = f(x)$, где $f(x)$ — некоторое выражение с переменной.

   Например: $y = x + 3$; $y = -3x^2$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ \sqrt{x+1}, & x > 0. \end{cases}$
2. При **графическом способе** задания функции изображают график функции $y = f(x)$ в системе xOy.
3. **Табличный способ** задания функции заключается в том, что соответствие между элементами множеств $D(f)$ и $E(f)$ задается в виде таблицы.

   При таком способе задания функции в таблице указывают значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ для имеющихся значений аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

x	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

   Примерами табличного способа задания функции являются, например, таблицы квадратов, кубов, квадратных корней и т. д.

   Например:

x	−2	−1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4	9

4. При **словесном способе** задания функции закон, согласно которому значения функции соответствуют значениям аргумента, формулируется словесно.

   Например, размер подоходного налога является функцией заработной платы налогоплательщика.

Пример 2. Функция задана формулой $y = 2x^2 + 1$. Найти значение функции при $x = -1$; 2; 10.

Решение:

Если $x = -1$, то $y(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 3$;

если $x = 2$, то $y(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$;

если $x = 10$, то $y(10) = 2 \cdot 10^2 + 1 = 201$.

Ответ: 3; 9; 201.

Пример 3. Найти значение аргумента x, при котором значение $y = 207$, если функция задана формулой: $y = 2x + 1$.

Решение:

Если $y = 2x + 1$ и $y = 207$, то $2x + 1 = 207$; $2x = 206$; $x = 103$.

Ответ: 103.

Пример 4. Найти область определения функции:

а) $y = x^2 + \frac{x}{3}$; б) $y = \frac{x+1}{x-2}$; в) $y = \frac{x-1}{|x|-4}$; г) $y = \frac{5}{x(x-1)(x+3)}$.

Решение:

а) $y = x^2 + \frac{x}{3}$; $D(f) = R$;

б) $y = \frac{x+1}{x-2}$; $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

в) $y = \frac{x-1}{|x|-4}$; $|x| - 4 \neq 0$; $|x| \neq 4$; $|x| \neq \pm 4$; $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$;

г) $y = \frac{5}{x(x-1)(x+3)}$; $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 5. В таблице показана следующая зависимость атмосферного давления p от высоты h над уровнем моря:

***h*, км**	0	1	2	3	4	5	6	7	10	12
***p*, мм рт. ст.**	760,0	712,0	675,1	595,2	525,7	428,9	401,3	400,9	390,8	350,5

1) Указать давление на высоте: а) 2 км; б) 4 км; в) 5 км; г) 12 км;

2) На какой высоте над уровнем моря давление равно:

а) 675,1; б) 525,7; в) 400,9; г) 390,8?

Ответ: 1) а) 675,1 мм рт. ст.; б) 525,7 мм рт. ст.; в) 428,9 мм рт. ст.; г) 350,5 мм рт. ст.; 2) а) 2 км; б) 4 км; в) 7 км; г) 10 км.

Пример 6. Дана функция $y = x^2 + x + 1$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) (0; 1); б) (−1; 2); в) (1; 3); г) (−4; 3).

Решение:

Если точка принадлежит графику, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y = x^2 + x + 1$.

а) (0; 1), т. е. $x = 0$, $y = 1$; $1 = 0^2 + 0 + 1$, т. е. $1 = 1$.

Точка принадлежит графику;

б) (−1; 2), т. е. $x = -1$, $y = 2$; $2 = (-1)^2 + (-1) + 1$, т. е. $2 \neq 3$.

Точка не принадлежит графику;

в) (1; 3), т. е. $x = 1$, $y = 3$; $3 = 1^2 + 1 + 1$, т. е. $3 = 3$.

Точка принадлежит графику;

г) (−4; 3), т. е. $x = -4$, $y = 3$; $3 = (-4)^2 + (-4) + 1$, т. е. $3 \neq 15$.

Точка не принадлежит графику.

5.1.2. График функции, возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства. Чтение графиков функции

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{3}{x+3}$, где $-2 \le x \le 3$. Составим таблицу значений функции для целых значений аргумента.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	$1{,}5$	1	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{2}$

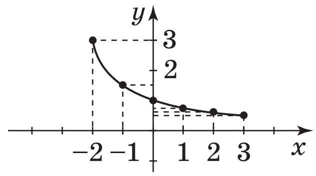


Рис. 5.1

Нанесем на координатную плоскость точки из таблицы. Соединим их плавной линией (рис. 5.1). Преимуществом графика является его наглядность, а недостатком — то, что по графику можно найти только приближенные значения.

По изображенному графику для любого аргумента можно найти значение функции и наоборот.

Пример 2. Рассмотрим график некоторой функции $y = f(x)$ (рис. 5.2). Найдем значение функции при $x = 2$. Через эту точку проведем прямую, перпендикулярную оси x до пересечения с графиком. Она пересечет график в точке $A(2; 4)$. Значит, если $x = 2$, то $y = 4$.

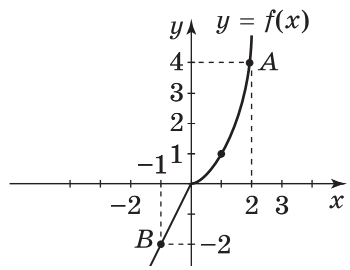


Рис. 5.2

Найдем значение аргумента, при котором $y = -2$. Проведем через эту точку прямую, перпендикулярную оси y. Она пересечет график в точке $B(-1; -2)$. Значит, если $y = -2$, то $x = -1$.

Заметим, что не всякое множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции. Например, на кривой, изображенной на рис. 5.3, значению $x = x_0$ соответствуют три значения y (y_1, y_2 и y_3), и, следовательно, такое соответствие не является функцией.

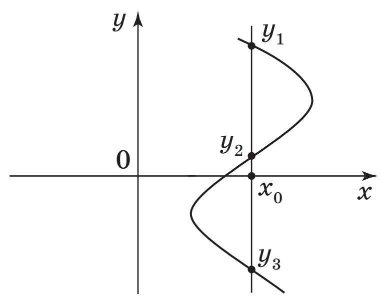


Рис. 5.3

Для того чтобы множество точек координатной плоскости **являлось графиком некоторой функции**, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси Oy, **пересекалась** с указанным графиком **не более чем в одной точке.**

Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на данном числовом промежутке x, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции (рис. 5.4), т. е. для любых x_1 и x_2 из x: если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

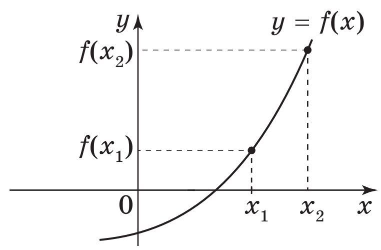


Рис. 5.4

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на данном числовом промежутке x, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (рис. 5.5), т. е. для любых x_1 и x_2 из x: если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 5.5).

Если функция только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется **монотонной** на этом промежутке.

Например, функция $y = 2x - 3$ является монотонно возрастающей на всей области определения (рис. 5.6). А функция $y = x^2 + 1$ не является монотонной на всей области определения, поскольку при $x \in (-\infty; 0]$ она является убывающей, а при $x \in [0; +\infty)$ — возрастающей (рис. 5.7).

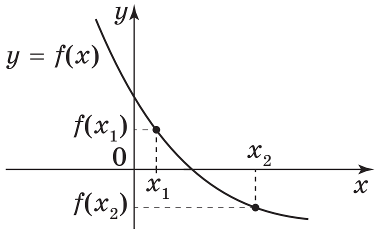


Рис. 5.5

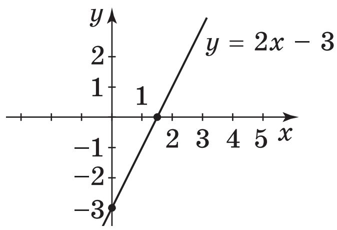


Рис. 5.6

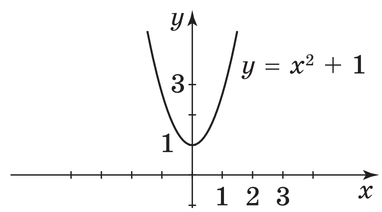


Рис. 5.7

Пример 3. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-4; 6]$. Указать промежутки возрастания и убывания функции (рис. 5.8).

Ответ: функция возрастает при $x \in [-2; 0]$ и $[5; 6]$; функция убывает при $x \in [-4; -2]$ и $[0; 5]$.

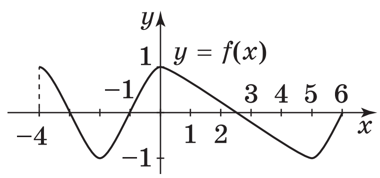


Рис. 5.8

Наибольшие и наименьшие значения функции

Функция $y = f(x)$, определенная на некотором промежутке, достигает своего **наибольшего значения**, если существует такая точка m из этого промежутка, что для всех x промежутка выполняется неравенство:

$$f(x) \le f(m) \text{ (рис. 5.9).}$$

Функция $y = f(x)$, определенная на некотором промежутке, достигает своего **наименьшего значения**, если существует такая точка m из этого промежутка, что для всех x промежутка выполняется неравенство:

$$f(x) \ge f(m) \text{ (рис. 5.10).}$$

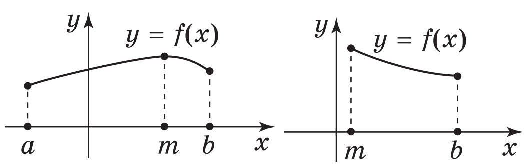


Рис. 5.9

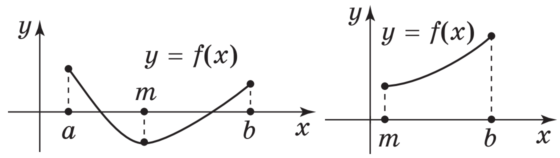


Рис. 5.10

Например, функция $y = x^2$ (рис. 5.11) не имеет наибольшего значения, а наименьшее значение при $x = 0$ равно нулю, поскольку $f(0) < f(x)$ для всех x области определения.

Функция $y = -x$ (рис. 5.11) не имеет наибольшего и наименьшего значения на всей области определения.

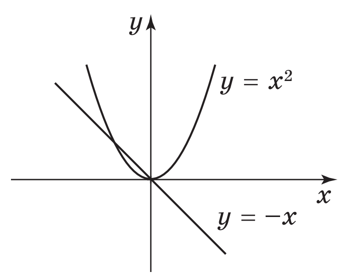


Рис. 5.11

Пример 4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-2; 3]$. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на этом промежутке (рис. 5.12).

Ответ: функция принимает наибольшее значение, равное 3 при $x = -2$, наименьшее значение -2 при $x = 1$.

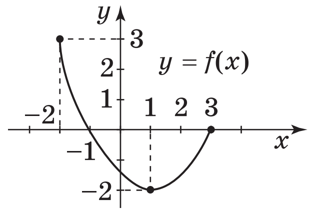


Рис. 5.12

Нули функции, промежутки знакопостоянства

Нули функции — значения аргумента, при котором значение функции равно нулю. То есть это корни уравнения $f(x) = 0$ (рис. 5.13).

На рис. 5.13 x_1 и x_2 — нули функции, т. е. это точки пересечения графика с осью Ox.

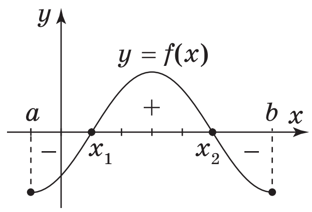


Рис. 5.13

Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т. е. остается положительной или отрицательной), называются **промежутками знакопостоянства**.

Так, на рис. 5.13 функция положительна, т. е. $f(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$, функция отрицательна, т. е. $f(x) < 0$ при $x \in [a; x_1) \cup (x_2; b]$.

Для нахождения нулей и промежутков знакопостоянства не обязательно иметь график функции, достаточно решить уравнение $f(x) = 0$ и неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

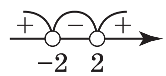
Пример 5. Для функции $y = x^2 - 4$ найти нули и промежутки знакопостоянства.

Решение:

Найдем нули функции, для этого решим уравнение $x^2 - 4 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 2$.

Найдем промежутки, где функция принимает положительные и отрицательные значения. Решим неравенство:

$$x^2 - 4 > 0;\ (x - 2)(x + 2) > 0.$$



Решим неравенство методом интервалов.

Ответ: нули: -2 и 2; $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-2; 2)$.

Пример 6. Не выполняя построения графика, найти точки пересечения графика $y = x^2 - 10$ с осями координат.

Решение:

График пересекает ось Ox, если $y = 0$, т. е. $x^2 - 10 = 0$; $x^2 = 10$; $x_1 = \sqrt{10}$; $x_2 = -\sqrt{10}$. Точки пересечения с осью Ox: $\left(\sqrt{10}; 0\right)$ и $\left(-\sqrt{10}; 0\right)$. График пересекает ось y, если $x = 0$. т. е. $y = -10$. График пересекает ось Oy в точке $(0; -10)$.

Ответ: $\left(\sqrt{10}; 0\right)$; $\left(-\sqrt{10}; 0\right)$; $(0; -10)$.

Четность и нечетность функций

Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для каждого значения x из ее области определения значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции **симметричен относительно оси Oy** (рис. 5.14).

Например, графики функций $y = x^2$; $y = 2x^2 - 2$; $y = |x|$ — четные.

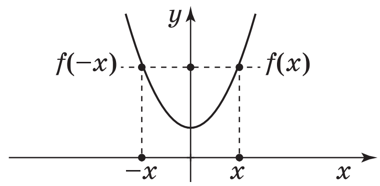


Рис. 5.14

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной,** если для каждого значения x из ее области определения значение $-x$ тоже принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

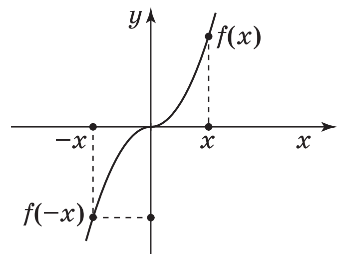


Рис. 5.15

График четной функции **симметричен относительно начала координат** (рис. 5.15).

Например, функции $y = x^3$; $y = 3x$; $y = -\dfrac{x}{4}$; $y = x^5 - x^3$ нечетные.

Пример 7. Четной или нечетной является функция?

а) $f(x) = x^7 + 2x^3$; б) $y = 3x^4 - \dfrac{x^2}{5} + 1$; в) $y = 2x^3 + x^2 - 1$.

Решение:

а) $f(-x) = (-x)^7 + 2(-x)^3 = -x^7 - 2x^3 = -(x^7 + 2x^3) = -f(x)$;
$f(-x) = -f(x)$, функция нечетная;

б) $f(-x) = 3(-x)^4 - \dfrac{(-x)^2}{5} + 1 = 3x^4 - \dfrac{x^2}{5} + 1 = f(x)$;
$f(-x) = f(x)$, функция четная;

в) $f(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 - 1 = -2x^3 + x^2 - 1 = -(2x^3 - x^2 + 1)$;
$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x)$. Функция является ни четной, ни нечетной. Это функция общего вида.

Чтение графиков функций

Чтение графика функции — это описание свойств функции по ее графику.

План описания функции:

1. Область определения функции $D(f)$ (множество допустимых значений переменной x) определяется по оси x.
2. Множество значений функции $E(f)$ определяется по оси y.
3. Четность, нечетность функции.
4. Наибольшее и наименьшее значение функции.
5. Нули функции. Определяются в точках пересечения графика с осью x.
6. Промежутки знакопостоянства функции (это множество значений x, при которых $y > 0$ или $y < 0$). Определяются по части графика, лежащей выше либо ниже оси x.
7. Промежутки возрастания и убывания функции.

Пример 8. Прочитать график функции $y = f(x)$ (рис. 5.16).

Решение:

1. $D(f) = [-4; 4]$.
2. Множество значений функции $E(f) = [-2; 4]$.
3. Функция является ни четной, ни нечетной.
4. Наибольшее значение функции $y = 4$ при $x = 2$; наименьшее значение функции $y = -2{,}5$ при $x = -2{,}5$.
5. Нули: $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 3{,}5$.
6. $f(x) > 0$ при $x \in (-0{,}5; 3{,}5)$; $f(x) < 0$ при $x \in [-4; -0{,}5) \cup (3{,}5; 4]$.
7. $f(x)$ возрастает при $x \in [-2{,}5; 2]$; $f(x)$ убывает при $x \in [-4; -2{,}5]$ и $[2; 4]$.

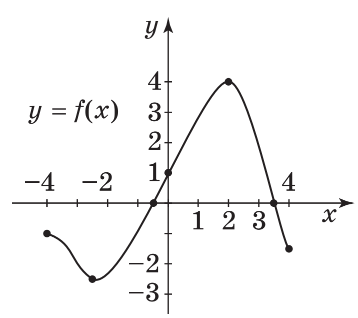


Рис. 5.16

5.1.3. Примеры графических зависимостей, отражающих реальные процессы

Рис. 5.17

Графики используются в самых разнообразных сферах деятельности человека, поскольку наглядно показывают изменение одних величин в зависимости от каких-либо других величин. Графики процессов, реально происходящих в природе, используют физики, биологи, экономисты, метеорологи, медики и т. д.

Например, ориентирование биологических ритмов людей заложено при рождении. Как эффективно использовать свои биологические особенности? Используя график, составленный биологами и медиками (рис. 5.17), можно планировать самые важные дела на то время, когда вы находитесь на пике работоспособности. С помощью графиков можно изобразить рост численности населения на земном шаре, уровень рождаемости, график уплаты налогов населением и т. д.

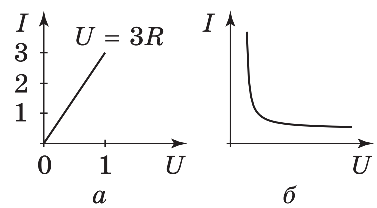


Рис. 5.18

Рассмотрим графическую зависимость силы тока от напряжения (закон Ома):

Сила тока I в цепи прямо пропорциональна напряжению U и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению участка цепи R (рис. 5.18, *а*):

$$U = IR; \; I = \frac{U}{R}.$$

Например, если $I = 3$ А, то $U = 3R$, это прямо пропорциональная зависимость. С другой стороны, при фиксированном напряжении, например $U = 12$ В, получим зависимость $I = \dfrac{12}{R}$. Это обратно пропорциональная зависимость, графиком которой является гипербола (рис. 5.18, *б*).

График обратной пропорциональности (гиперболу) используют и физики для отражения явления капиллярности, поскольку в канале жидкость поднимается тем выше, чем меньше его размер.

Рассмотрим примеры решения задач на функциональные зависимости, отражающие реальные процессы.

Пример 1. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении суток 3, 4 и 5 сентября (рис. 5.19).

На оси абсцисс отмечено время суток в часах, на оси ординат — значения температуры в градусах.

Определить по графику:

а) наибольшую температуру воздуха 4 сентября;

б) в какое время суток 3 сентября температура составила 10 °С;

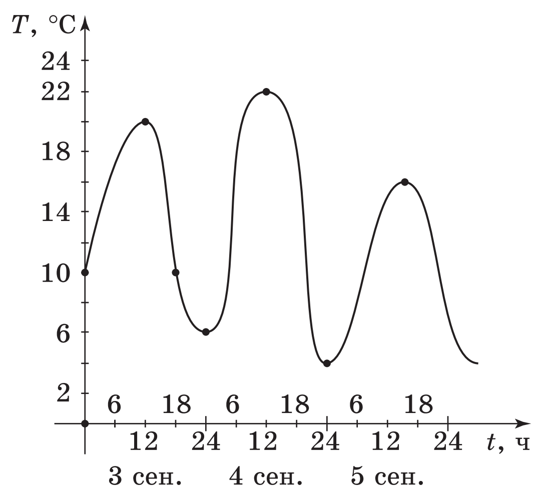


Рис. 5.19

в) указать период времени 5 сентября, в течение которого температура понижалась.

Ответ: а) 22 °С; б) 0 ч и 18 ч; в) с 15 ч до 24 ч.

Пример 2. Воду некоторое время нагревали. Зависимость температуры T °С от времени t (в мин) (рис. 5.20) задана так:

$$T^{\circ}(t) = \begin{cases} 10t + 20, \text{ если } 0 \le t \le 8, \\ 100, \text{ если } 8 < t \le 10, \\ -2t + 120, \text{ если } 10 < t \le 15. \end{cases}$$

Построить график этой зависимости.

Определить $T(5)$, $T(9)$, $T(12)$, начальную и конечную температуру воды: t_0, $t_к$.

Решение:

$T(5) = 10t + 20$, поскольку $0 \le 5 \le 8$, т. е. $T(5) = 10 \cdot 5 + 20 = 70$ °С;
$T(9) = 100$, поскольку $8 < 9 \le 10$;
$T(12) = -2t + 120 = -2 \cdot 12 + 120 = 96$ °С, поскольку $10 < 12 < 15$.

Начальная температура $t_0 = T(0) = 10t + 20 = 10 \cdot 0 + 20 = 20$ °С, конечная — $t_к = T(15) = -2t + 120 = -2 \cdot 15 + 120 = 90$ °С.

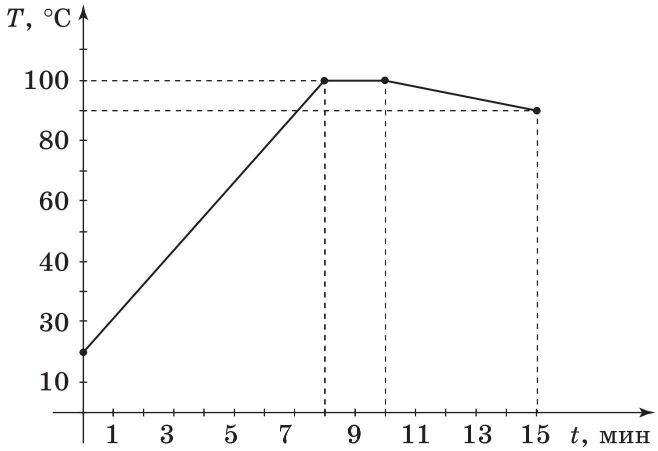


Рис. 5.20

Пример 3. Имеются два графика (рис. 5.21): на одном из них изображен процесс наполнения бака водой, на другом — процесс вытекания воды из бака. По каждому графику ответить на вопросы:

а) сколько литров воды было в баке в начальный момент времени?
б) сколько литров воды было в баке через 1 мин, 6 мин, 8 мин?
в) через сколько минут в баке стало 25 л воды?
г) какой именно процесс изображен на графике (наполнения или вытекания)?
д) сколько литров воды наливается (вытекает) ежеминутно?
е) задать формулой зависимость объема воды V в баке от времени t.

$V(t) = 50 - 5t$ $\qquad\qquad$ $V(t) = 15 + 2{,}5t$

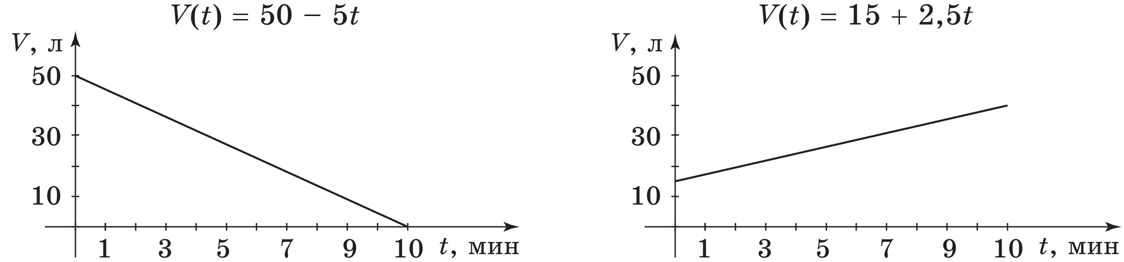


Рис. 5.21

Решение:

а) 50 л;
б) через 1 мин — 45 л;
через 6 мин — 20 л;
через 8 мин — 10 л;
в) через 5 мин;
г) процесс вытекания воды из бака;
д) ежеминутно вытекает 5 л воды;
е) первоначально было 50 л воды, значит, имеем зависимость:

$$V(t) = 50 - 5t$$

а) 15 л;
б) через 1 мин — 17,5 л;
через 6 мин — 30 л;
через 8 мин — 35 л;
в) через 4 мин;
г) процесс наполнения бака;
д) ежеминутно добавляется 2,5 л воды;
е) первоначально было 15 л воды, ежеминутно добавляется 2,5 л, значит, имеем зависимость:

$$V(t) = 15 + 2{,}5t$$

5.1.4. Функция, описывающая прямую пропорциональную зависимость, ее график

Пример 1. Автомобиль движется со скоростью 80 км/ч. Построим график зависимости расстояния, пройденного автомобилем за первые 5 ч движения. Поместим сведения о движении автомобиля в таблицу:

t	1	2	3	4	5
s	80	160	240	320	400

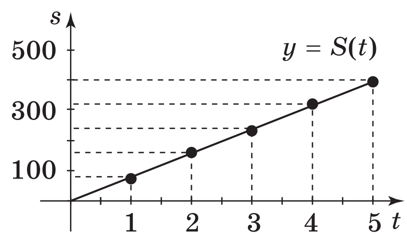


Рис. 5.22

Построим по этой таблице график функции $y = s(t)$ (рис. 5.22). Точки, описанные в таблице, лежат на одной прямой $y = 80t$ (км). В данной задаче одна величина изменяется пропорционально другой.

Имеем функцию $y = kx$, которая называется **прямой пропорциональностью**. Графиком этой функции является **прямая, проходящая через начало координат**.

Примерами прямо пропорциональной зависимости являются:

- длина окружности, пропорциональная радиусу:

$$l(R) = 2\pi R;$$

- путь при равномерном движении, пропорциональный времени:

$$s(t) = v \cdot t;$$

- периметр квадрата, пропорциональный стороне:

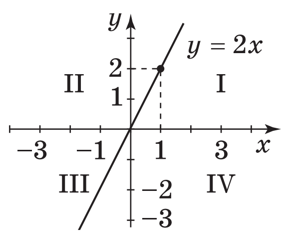
$$P(a) = 4a.$$

Поскольку графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат, для ее построения необходимо найти только одну точку.

Например:

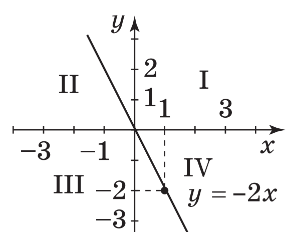
$y = 2x$

x	1
y	2



$y = -2x$

x	1
y	−2



В зависимости $y = kx$ число k называют **угловым коэффициентом**, или **коэффициентом пропорциональности**.

Если $k > 0$, то график проходит через I и III координатные четверти, а если $k < 0$, то через II и IV.

Заметим, что график функции $y = x$ является биссектрисой I и III четвертей, а $y = -x$ — биссектрисой II и IV четвертей.

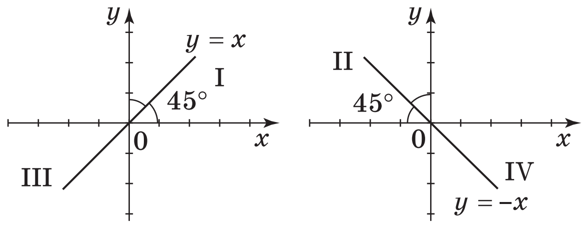


Рис. 5.23

Свойства функции $y = kx$

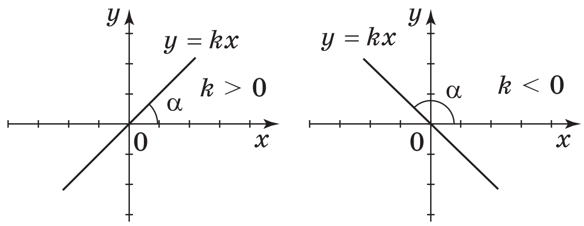


Рис. 5.24

1. Область определения: $D(f) = R$.
2. Множество значений: $E(f) = R$.
3. Промежутки возрастания и убывания:

$k > 0$	$k < 0$
Функция возрастает на всей области определения; $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$	Функция убывает на всей области определения; $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$; $f(x) < 0$ при $x \in (0; +\infty)$

Графику принадлежит точка с координатами (0; 0).

Наибольшего и наименьшего значения функция $y = kx$ не имеет.

4. Функция нечетная.

Пример 2. Построить графики функций:

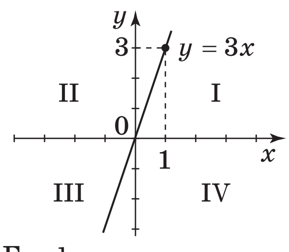
а) $y = 3x$; б) $y = \frac{1}{3}x$; в) $y = -4x$; г) $y = -\frac{1}{4}x$.

Указать, в каких координатных четвертях они расположены.

Решение:

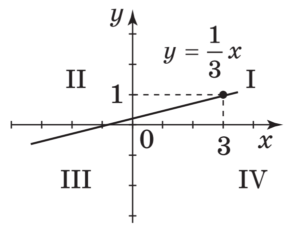
а) $y = 3x$;

x	1
y	3



б) $y = \frac{1}{3}x$;

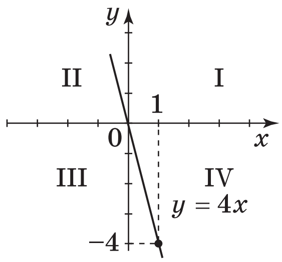
x	3
y	1



Графики расположены в I и III четвертях.

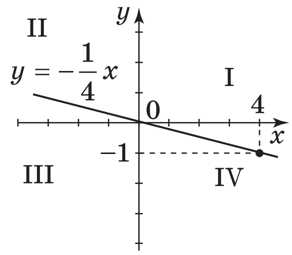
в) $y = -4x$;

x	1
y	-4



г) $y = -\frac{1}{4}x$;

x	4
y	-1



Графики расположены во II и IV четвертях.

Пример 3. Какие из точек $A(1;\ 1)$, $B(2;\ -4)$, $C(-5;\ 2{,}5)$ и $D(2;\ -1)$ принадлежат графику функции $y = -\frac{1}{2}x$?

Решение:

а) $A(1;\ 1)$; $x = 1$, $y = 1$; $y = -\frac{1}{2}x$; $1 \neq -\frac{1}{2}\cdot 1$; не принадлежит графику;

б) $B(2;\ -4)$; $x = 2$, $y = -4$; $y = -\frac{1}{2}x$; $-4 = -\frac{1}{2}\cdot 2$; $-4 \neq -1$; не принадлежит;

в) $C(-5;\ 2{,}5)$; $x = -5$, $y = 2{,}5$; $y = -\frac{1}{2}x$; $2{,}5 = -\frac{1}{2}\cdot(-5)$; $2{,}5 = 2{,}5$; принадлежит;

г) $D(2;\ -1)$; $x = 2$, $y = -1$; $y = -\frac{1}{2}x$; $-1 = -\frac{1}{2}\cdot 2$; $-1 = -1$; принадлежит.

Пример 4. Точка $A(0{,}7;\ 70)$ принадлежит графику прямой пропорциональности. Записать эту функцию формулой.

Решение:

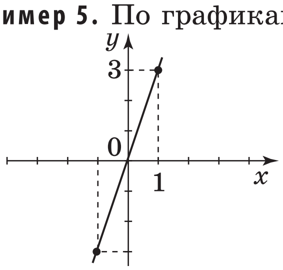
$y = kx$. Если точка A принадлежит графику, ее координаты удовлетворяют уравнению $y = kx$.

$$A(0{,}7;\ 70);\ x = 0{,}7;\ y = 70;\ 70 = x \cdot 0{,}7;\ k = \frac{70}{0{,}7} = 100.$$

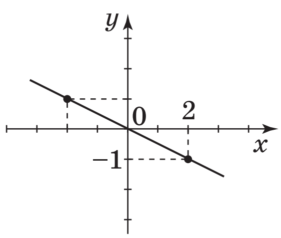
Ответ: $y = 100x$.

Пример 5. По графикам функции записать формулы зависимости.

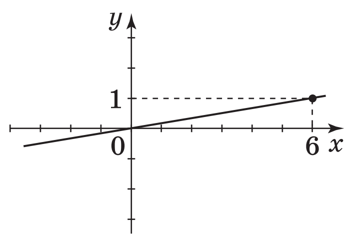
а)



б)



в)



Решение:

а) Графику принадлежит точка $(1;\ 3)$, тогда $k = \frac{y}{x} = \frac{3}{1} = 3$; $y = 3x$.

б) Графику принадлежит точка $(2;\ -1)$; $k = \frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x$.

в) Графику принадлежит точка $(6;\ 1)$; $k = \frac{y}{x} = \frac{1}{6}$; $y = \frac{x}{6}$.

Пример 6. Плот плывет по реке со скоростью 3 км/ч. Выразить путь s, пройденный плотом за x ч. Построить график зависимости пути плота от времени.

Найти по графику (рис. 5.25):

а) сколько километров прошел плот за 2,5 ч;

б) за какое время плот проплывет 9 км.

Решение:

Поскольку плот за 1 ч проходит 3 км, графику принадлежит точка (1; 3).

а) Из точки на оси $x = 2{,}5$ проведем прямую, перпендикулярную оси Ox до пересечения с графиком, получим точку (2,5; 7,5). Значит, $s = 7{,}5$ км.

б) Аналогично при $s = 9$ км время $x = 32$ ч.

Ответ: 7,5 км; 32 ч.

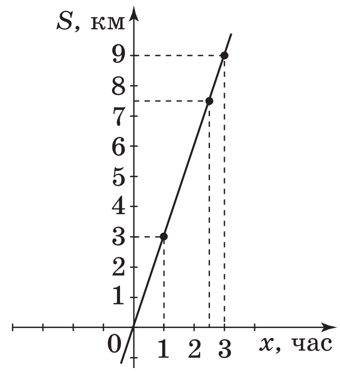


Рис. 5.25

5.1.5. Линейная функция, ее график, геометрический смысл коэффициентов

Линейной называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа.

Графиком любой линейной функции является **прямая**.

Чтобы построить график функции, необходимо координаты двух точек, принадлежащих графику, т. е. два значения x, подставить в уравнение функции и найти значение y.

Пример 1. Построить график функции $y = -\dfrac{1}{3}x + 1$.

Решение:

x	0	3
y	1	0

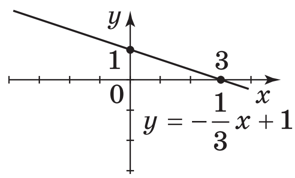


Рис. 5.26

Геометрический смысл коэффициентов k и b в уравнении $y = kx + b$

1. Коэффициент k (угловой коэффициент) отвечает за наклон графика функции:
   - если $k > 0$, график имеет острый угол с положительным направлением оси Ox; $0° < \alpha < 90°$ (рис. 5.27);
   - если $k < 0$, график имеет тупой угол с положительным направлением оси Ox; $90° < \alpha < 180°$ (рис. 5.28).
2. Коэффициент b отвечает за сдвиг графика вдоль оси Oy:
   - если $b > 0$, то график функции $y = kx + b$ получается из графика $y = kx$ путем сдвига на b единиц **вверх** вдоль оси Oy;
   - если $b < 0$, то график функции $y = kx + b$ получается из графика $y = kx$ путем сдвига на $|b|$ единиц **вниз** вдоль оси Oy.

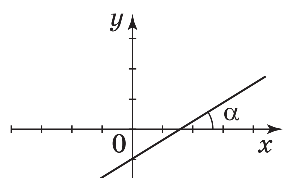


Рис. 5.27

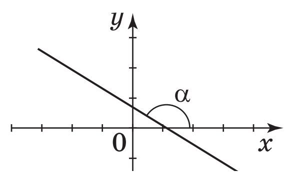
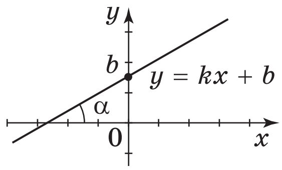
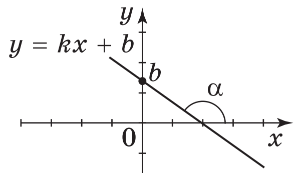
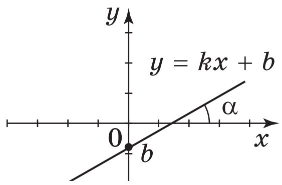
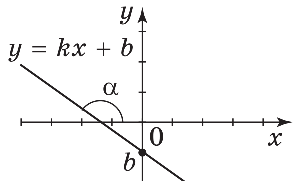


Рис. 5.28

Имеем четыре ситуации:

$k > 0$, $b > 0$; $0° < \alpha < 90°$ 	$k < 0$, $b > 0$; $90° < \alpha < 180°$ 
$k > 0$, $b < 0$; $0° < \alpha < 90°$ 	$k < 0$, $b < 0$; $90° < \alpha < 180°$ 

Кроме того, рассмотрим случаи:

1. $y = kx + b$; $b = 0$. График прямой пропорциональности (рис. 5.29).
2. $y = kx + b$; $k = 0$, $y = b$. График этой функции — прямая, параллельная оси Ox (рис. 5.30).

Отдельно отметим $x = a$. График этого уравнения — прямая, параллельная оси Oy (рис. 5.31).

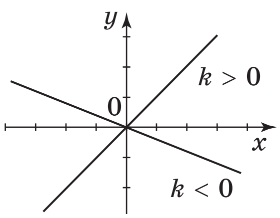


Рис. 5.29

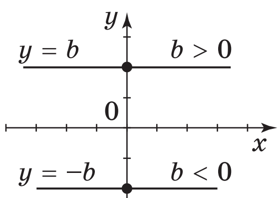


Рис. 5.30

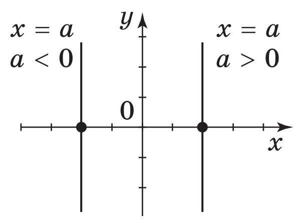


Рис. 5.31

Обратите внимание! Уравнение $x = a$ **не является функцией**, т. к. одному значению аргумента соответствует бесчисленное множество значений функции, что противоречит определению функции.

Точки пересечения графика функции $y = kx + b$ с осями координат

Точка пересечения графика с осью Ox имеет координаты $B\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$; с осью Oy — $A(0; b)$ (рис. 5.32).

Условие параллельности двух прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$

График функции $y = k_1x + b_1$ параллелен графику $y = k_2x + b_2$, если $k_1 = k_2 = k$ и $b_1 \neq b_2$ (рис. 5.33).

Условие перпендикулярности прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$

Графики функции $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны, если $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. (рис. 5.34).

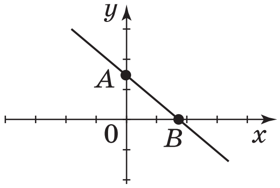


Рис. 5.32

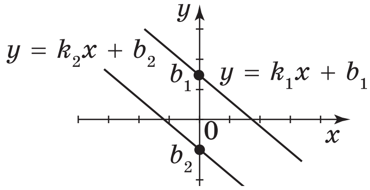


Рис. 5.33

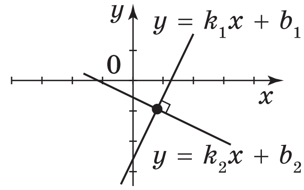


Рис. 5.34

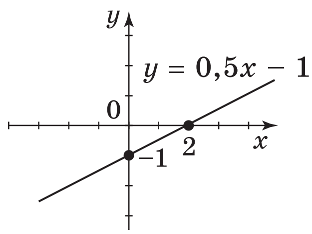
Пример 2. Построить график линейной функции: а) $y = 0{,}5x - 1$; б) $y = -3x + 2$. Найти:

1) область определения функции $D(f)$;
2) область значений функции $E(f)$;
3) нули и промежутки знакопостоянства;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) точки пересечения с осями координат;
6) значение функции, если значение аргумента равно 4;
7) значение аргумента, если значение функции равно -1.

Решение:

а) $y = 0{,}5x - 1$

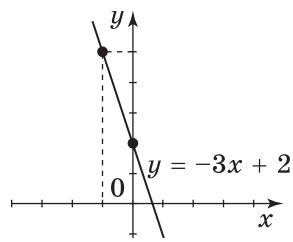
x	0	2
y	-1	0



1. $D(f) = R$.
2. $E(f) = R$.
3. Если $y = 0$, то $x = 2$. $f(x) > 0$ при $x \in (2; +\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 2)$.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Точки пересечения с осями координат: $(0; -1)$ и $(2; 0)$.
6. Если $x = 4$, то $y = 0{,}5 \cdot 4 - 1 = 1$; $(4; 1)$.
7. Если $y = -1$, то $0{,}5x - 1 = -1$; $x = 0$; $(0; -1)$.

б) $y = -3x + 2$

x	0	-1
y	2	5



1. $D(f) = R$.
2. $E(f) = R$.
3. Если $y = 0$, то $x = \dfrac{2}{3}$. $f(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right)$; $f(x) < 0$ при $x \in \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.
4. Функция убывает на всей области определения.
5. Точки пересечения с осями координат: $(0; 2)$ и $\left(\dfrac{2}{3}; 0\right)$.
6. Если $x = 4$, то $y = -3 \cdot 4 + 2 = -10$; $(4; -10)$.
7. Если $y = -1$, то $-3x + 2 = -1$; $x = 1$; $(1; -1)$.

Пример 3. Построить график функции $y = kx + b$, если известно, что он проходит через точку $(-1; 1)$ и параллелен графику $y = 4x$.

Решение:

График $y = kx + b$ параллелен графику $y = 4x$, поэтому $k = 4$.

Имеем $y = 4x + b$. Но этот график проходит через точку $(-1; 1)$, т. е. этому уравнению удовлетворяют $x = -1$; $y = 1$.

$$1 = 4 \cdot (-1) + b;\ b = 1 + 4;\ b = 5.$$

Следовательно, нужно построить график $y = 4x + 5$. Одна точка для построения есть, т. е. $(-1; 1)$. Пусть вторая: $x = 0$, $y = 5$.

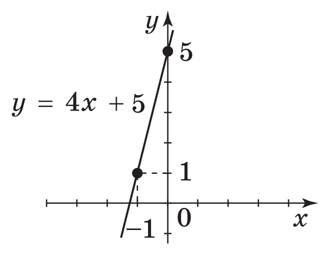


Рис. 5.35

Пример 4. Не выполняя построения графика $y = 4x - 6$, найти точку этого графика, в которой:
а) абсцисса равна ординате; б) абсцисса и ордината — противоположные числа;
в) абсцисса в два раза меньше ординаты.

Решение:

а) Если абсцисса равна ординате, то $x = y$.

$$x = 4x - 6;\ -3x = -6;\ x = 2;\ y = 2.\ \text{Это точка } (2;\ 2).$$

б) Абсцисса и ордината — противоположные числа, т. е. $x = -y$.

$$-x = 4x - 6;\ -5x = -6;\ x = 1{,}2;\ y = -1{,}2.\ \text{Это точка } (1{,}2;\ -1{,}2).$$

в) Абсцисса в два раза меньше ординаты, т. е. $y = 2x$.

$$2x = 4x - 6;\ -2x = -6;\ x = 3;\ y = 6.\ \text{Это точка } (3;\ 6).$$

5.1.6. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость. Гипербола

Приведем примеры обратно пропорциональных зависимостей.

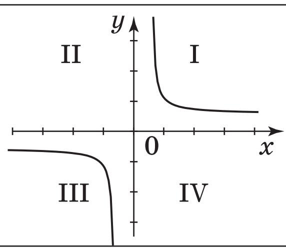
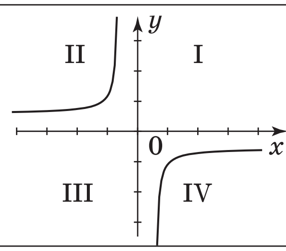
Пример 1. При равномерном прямолинейном движении тело движется по закону $s = v \cdot t$, где s — путь, v — скорость, t — время. Тогда $t = \dfrac{s}{v}$. Предположим, что путь равен 15 м, тогда $t = \dfrac{15}{v}$. Время t является функцией от скорости: чем больше возрастает скорость, тем меньше потребуется времени для прохождения фиксированного пути.

По закону Ома $U = IR$, где R — сопротивление проводника, U — напряжение, I — сила тока.

Сила тока при фиксированном $U = 10$ В обратно пропорциональна сопротивлению проводника: $I = \dfrac{10}{R}$. Такие зависимости называют обратно пропорциональными. Обозначают $y = \dfrac{k}{x}$.

Функция, которую можно задать формулой вида $y = \dfrac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — некоторое число, отличное от нуля, называется **обратной пропорциональностью**.

Свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$

$k > 0$	$k < 0$
	
1. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме $x = 0$: $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.	

Окончание таблицы

$k > 0$	$k < 0$
2. Множество значений — множество всех действительных чисел, кроме $y = 0$: $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.	
3. Нечетная. График симметричен относительно начала координат.	
4. График функции — **гипербола**. Состоит из двух ветвей.	
5. График лежит в I и III координатных четвертях. При $x > 0$ $y > 0$; при $x < 0$ $y < 0$.	5. График лежит во II и IV координатных четвертях. При $x > 0$ $y > 0$; при $x < 0$ $y > 0$.
6. Функция убывает на всей области определения, т. е. при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.	6. Функция возрастает на всей области определения, т. е. при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Пример 2. В цилиндре под поршнем при постоянной температуре находится газ. Объем V (литров) газа при давлении p (атмосфер) вычисляется по формуле $V = \dfrac{15}{p}$.

а) Построить график зависимости объема газа от его давления.

б) Найти объем, занимаемый газом при 10 атм.

в) Найти давление, при котором газ имеет объем 3 л.

Решение:

а) Составим таблицу для построения графика с учетом, что $p > 0$.

p	1	3	5	15
V	15	5	3	1

б) Если $p = 10$ атм, то $V = \dfrac{15}{10} = 1{,}5$ л.

в) Если $V = 3$ л, то $p = \dfrac{15}{V} = \dfrac{15}{3} = 5$ атм.

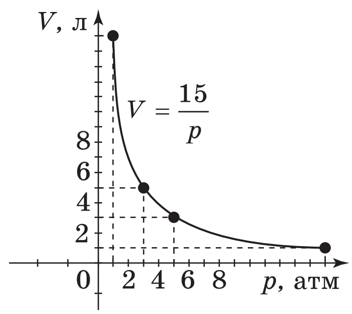


Рис. 5.36

Пример 3. Построить графики функций: $y = \dfrac{3}{x}$ и $y = \dfrac{-5}{x}$.

Решение:

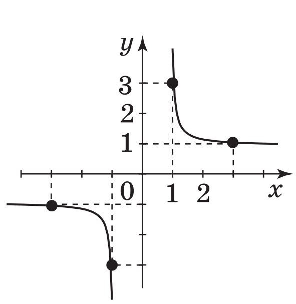
Составим таблицы значений для построения графиков.

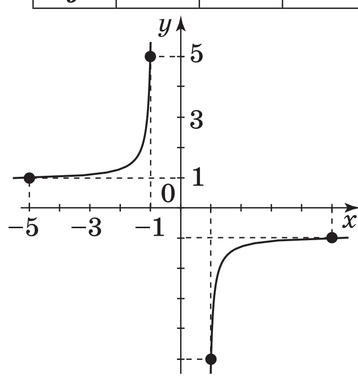
$y = \dfrac{3}{x}$

x	-3	-1	1	3
y	-1	-3	3	1

$y = \dfrac{-5}{x}$

x	-5	-1	1	5
y	1	5	-5	-1





Дробно-линейная функция и ее график

Функция вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — постоянные, причем $c \neq 0$, называется **дробно-линейной**.

Функция определена всюду, кроме $x = -\dfrac{d}{c}$.

Дробно-линейную функцию можно привести к виду:

$$y = n + \frac{k}{x+m}, \text{ где } m = \frac{d}{c},\ n = \frac{a}{c}.$$

Таким образом, график дробно-линейной функции — это **гипербола**, которую можно получить **сдвигом** гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ на $-m$ единиц вдоль оси Ox и на n единиц вдоль оси Oy.

Пример 4. Построить график функции:

а) $y = \dfrac{3}{x-2} + 1$; б) $y = \dfrac{-2x}{x+1}$; в) $y = \left|\dfrac{4x-11}{x-2}\right|$.

Решение:

а) График функции $y = \dfrac{3}{x-2} + 1$ получается из графика функции $y = \dfrac{3}{x}$ путем сдвига на 2 единицы вправо вдоль оси Ox и на 1 единицу вверх вдоль оси Oy. $x \neq 2$ (рис. 5.37).

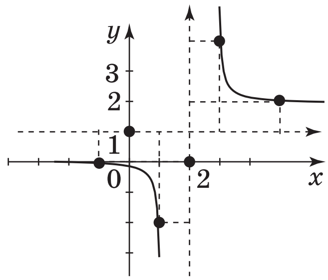


Рис. 5.37

б) Построим график $y = \dfrac{-2x}{x+1}$ $(x \neq -1)$. Выделим целую часть:

$$\frac{-2x}{x+1} = \frac{-2x-2+2}{x+1} = \frac{-2(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x+1} - 2.$$

Таким образом, график функции $y = \dfrac{-2x}{x+1}$ или $y = \dfrac{2}{x+1} - 2$ получим из графика $y = \dfrac{2}{x}$ путем сдвига по оси Ox на 1 единицу влево и по оси Oy на 2 единицы вниз (рис. 5.38).

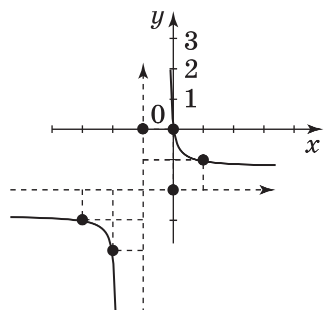


Рис. 5.38

в) Построим график функции $y = \left|\dfrac{4x-11}{x-2}\right|$.

Рассмотрим выражение:

$$\frac{4x-11}{x-2} = \frac{4x-8-3}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} - \frac{3}{x-2} = 4 - \frac{3}{x-2}.$$

График функции $y = \dfrac{4x-11}{x-2}$ получим из графика $y = -\dfrac{3}{x}$ путем переноса его вверх на 4 единицы по оси Oy и вправо на 2 единицы по оси Ox.

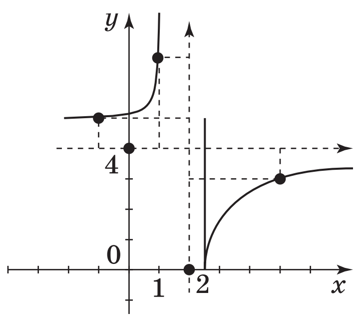


Рис. 5.39

Чтобы получить график $y = \left|\frac{4x-11}{x-2}\right|$, необходимо часть графика $y = \frac{4x-11}{x-2}$ выше оси Ox оставить без изменения, а часть графика ниже оси Ox отобразить симметрично относительно оси Ox (см. п. 5.1.10) (рис. 5.39).

Пример 5. Решить графически уравнение: $\frac{6}{x} + 1 = x$.

Решение:

Построим графики функций $y = \frac{6}{x} + 1$ и $y = x$ (рис. 5.40). График функции $y = \frac{6}{x} + 1$ получаем путем переноса графика $y = \frac{6}{x}$ на 1 единицу вверх вдоль оси Oy.

Графики пересекаются в точках с абсциссами $x = -2$ и $x = 3$.

Это корни уравнения $\frac{6}{x} + 1 = x$.

Ответ: -2; 3.

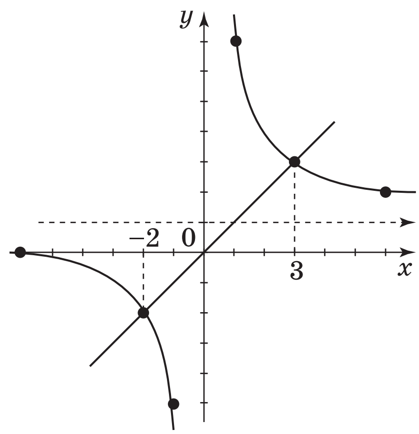


Рис. 5.40

5.1.7. Квадратичная функция, ее график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии

Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Областью определения квадратичной функции является множество всех действительных чисел. Примером квадратичной функции является зависимость пути от времени при равноускоренном движении.

Рассмотрим более подробно функцию $y = x^2$.

Свойства функции $y = x^2$

1. Область определения — все действительные числа: $D(f) = R$.
2. Множество значений: $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Графиком функции является парабола. Вершина параболы — (0; 0).
4. $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; отрицательных значений нет.
5. Четная функция, график симметричен относительно оси Oy.
6. Возрастает при $x \in [0; +\infty)$; убывает при $x \in (-\infty; 0]$.

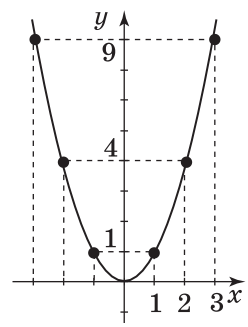


Рис. 5.41

Пример 1. Проходит ли график функции $y = x^2$ через точку?

а) $A(1; 4)$; б) $B(-1; -1)$; в) $C\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right)$; г) $D(-3; -9)$.

Решение:

Точки B и D не принадлежат графику $y = x^2$, поскольку $y \le 0$. Проверим точки: $A(1;\ 4)$; $x = 1$; $y = 4$. $y = x^2$; $4 \ne 1^2$; график не проходит через точку;

$C\left(-\dfrac{2}{3};\ \dfrac{4}{9}\right)$; $x = -\dfrac{2}{3}$; $y = \dfrac{4}{9}$; $y = x^2$; $\dfrac{4}{9} = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$; график проходит через точку.

Пример 2. Сколько корней имеет уравнение $x^2 - \dfrac{4}{x} = 0$?

Решение:

Изобразим схематично графики функций $y = x^2$ и $y = \dfrac{4}{x}$. Количество точек пересечения графиков и будет количеством корней уравнения (рис. 5.42).

Ответ: один корень.

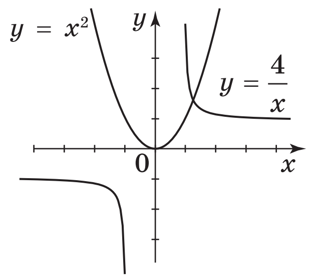


Рис. 5.42

Пример 3. При каких значениях x точки параболы $y = x^2$ расположены ниже прямой $y = -x + 6$?

Решение:

Изобразим схематично графики функции (рис. 5.43). Чтобы ответить на вопрос, найдем координаты точек пересечения графиков.

Для этого решим уравнение: $x^2 = -x + 6$; $x^2 + x - 6 = 0$. Имеем корни: $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$.

По схеме видно, что точки параболы расположены ниже прямой при $-3 \le x \le 2$.

Ответ: $-3 \le x \le 2$.

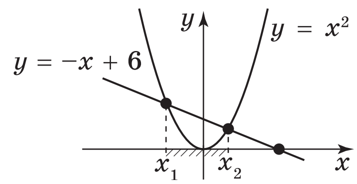


Рис. 5.43

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$

1. Область определения — все действительные числа: $D(f) = R$.
2. Область значений:
   - если $a > 0$, то $E(f)$: $[y_0;\ +\infty)$;
   - если $a < 0$, то $E(f)$: $(-\infty;\ y_0)$, где $(x_0;\ y_0)$ — координаты вершины параболы.
3. При $b = 0$ функция $y = ax^2 + c$ — четная, $b \ne 0$ — общего вида (рис. 5.44).
4. Графиком функции является парабола. Вершина параболы — точка $(m;\ n)$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$; $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Координату точки n можно записать и так: $n = am^2 + bm + c$.
5. При $a > 0$ функция убывает на $(-\infty;\ x_0]$ и возрастает на $[x_0;\ +\infty)$, где $x_0 = m = -\dfrac{b}{2a}$.
6. Ось симметрии параболы: $x = m = -\dfrac{b}{2a}$.
7. Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, $a < 0$ — ветви параболы направлены вниз.

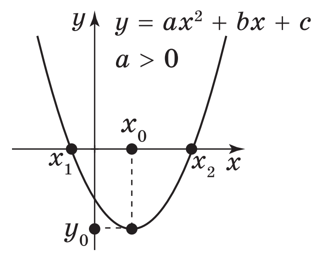


Рис. 5.44

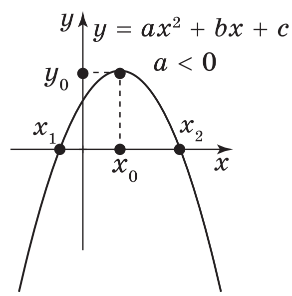


Рис. 5.45

Рассмотрим два основных способа построения параболы.

Построение графика квадратичной функции по четырем характеристическим точкам (вершина, нули, точка пересечения с осью Oy)

1. Строим вершину параболы (m; n), вычислив m и n по формулам:
$$m = -\frac{b}{2a};\ n = am^2 + bm + c.$$
Указываем направление ветвей параболы.
2. Проводим через вершину параболы прямую, параллельную оси Oy, — ось симметрии параболы; $x = m$.
3. Находим нули функции (если они есть), решив уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Строим на оси Ox точки x_1 и x_2 — корни решенного уравнения.
4. Находим точку пересечения с осью Oy: (0; c), отмечаем ее на оси Oy.
5. При необходимости находим несколько дополнительных точек.
6. Строим график функции через найденные точки.

Пример 4. Построить графики функций:

а) $y = x^2 - 3x + 2$;
б) $y = -2x^2 + 3x - 1$;
в) $y = -x^2 + 4x$;
г) $y = x^2 - 2x + 4$.

Решение:

а) $y = x^2 - 3x + 2$ (рис. 5.46).

1. Найдем координаты вершины параболы: $m = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $n = (1{,}5)^2 - 3 \times$ $\times\ 1{,}5 + 2 = -0{,}25$. Ветви параболы направлены вверх ($a = 1$; $1 > 0$).
2. Ось симметрии — $x = 1{,}5$.
3. Нули функции — корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, т. е. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
4. Точка пересечения с осью Oy: (0; 2).

б) $y = -2x^2 + 3x - 1$ (рис. 5.47).

1. Координаты вершины параболы:
$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4};\ n = -2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{8}.$$
Ветви параболы направлены вниз.
2. Ось симметрии — $x = \frac{3}{4}$.
3. Нули функции — корни уравнения $-2x^2 + 3x - 1 = 0$; $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$.
4. Точка пересечения с осью Oy: (0; –1).
5. Дополнительные точки: $x = 2$, $y = -3$.

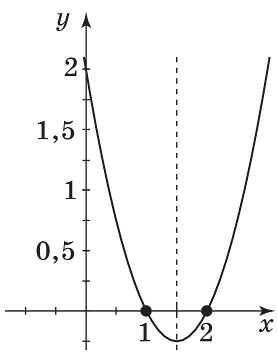


Рис. 5.46

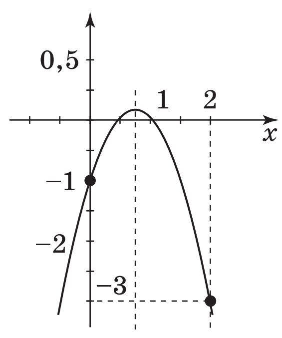


Рис. 5.47

в) $y = -x^2 + 4x$ (рис. 5.48).

1. Координаты вершины: $m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2$; $b = -4 + 8 = 4$. Ветви параболы направлены вниз.
2. Ось симметрии — $x = 2$.
3. Нули функции — корни уравнения $-x^2 + 4x = 0$; $x(x - 4) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.
4. Точка пересечения с осью Oy: (0; 0).

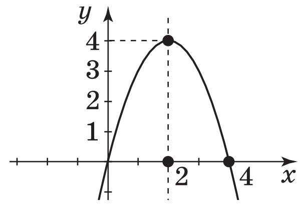


Рис. 5.48

г) $y = x^2 - 2x + 4$ (рис. 5.49).

1. Вершина параболы: $m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$; $n = 1 - 2 + 4 = 3$. Ветви параболы направлены вверх.
2. Ось симметрии — $x = 1$.
3. Нулей нет, т. к. уравнение $x^2 - 2x + 4$ не имеет корней.
4. Точка пересечения с осью Oy: (0; 4).
5. Дополнительные точки: $x = 3$, $x = -1$, $y = 7$.

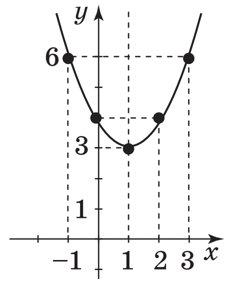


Рис. 5.49

Построение графика квадратичной функции методом выделения полного квадрата и параллельным переносом

Этот метод предполагает приведение функции $y = ax^2 + bx + c$ к виду $y = a(x - m)^2 + n$ и параллельный перенос графика $y = ax^2$ на m единицу вдоль оси Ox на n единиц по оси Oy.

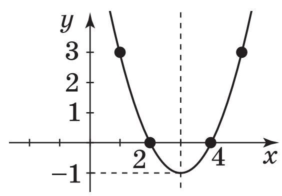


Рис. 5.50

Пример 5. Построить график функций:

а) $y = x^2 - 6x + 8$;
б) $y = -x^2 - 6x - 10$;
в) $y = x^2 - 2x$;
г) $y = -2x^2 + 4x$.

Решение:

а) $y = x^2 - 6x + 8$ (рис. 5.50).

$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1.$

Это график функции $y = x^2$ (верви направлены вверх), который перенесли вдоль оси Ox на 3 единицы вправо и вдоль оси Oy на 1 единицу вниз.

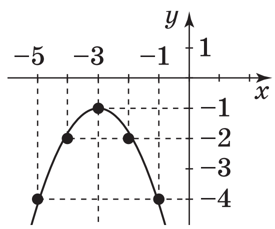


Рис. 5.51

б) $y = -x^2 - 6x = 10$ (рис. 5.51).

$$-x^2 - 6x - 10 = -(x^2 + 6x + 10) = -(x^2 + 6x + 9 + 1) = -(x + 3)^2 - 1.$$

Это график функции $y = -x^2$ (ветви направлены вниз), который перенесли на 3 единицы влево по оси Ox и на 1 единицу вниз по оси Oy.

в) $y = x^2 - 2x$ (рис. 5.52).

$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1.$

Парабола вида $y = x^2$ (ветви направлены вверх), перенос $\xrightarrow{1}\downarrow^{1}$.

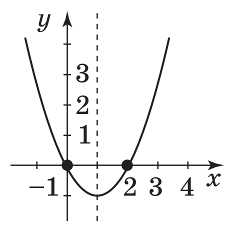


Рис. 5.52

г) $y = -2x^2 + 4x$ (рис. 5.53).

$$-2x^2 + 4x = -2(x^2 - 2x) = -2(x^2 - 2x + 1 - 1) = -2(x - 1)^2 + 2.$$

Парабола вида $y = -2x^2$ (ветви направлены вниз), перенос $\xrightarrow{1}\uparrow^{2}$.

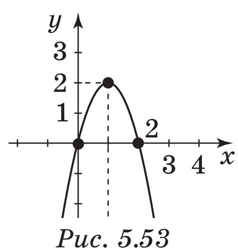


Рис. 5.53

Пример 6. Построить график функции: а) $y = |x^2 - 2|$; б) $y = x^2 - 2|x|$.

Решение:

а) Строим график функции $y = x^2 - 2$ (рис. 5.54). Это график $y = x^2$ с переносом на 2 единицы вниз по оси Oy. Далее часть графика выше оси Ox без изменения, ниже — симметрия относительно оси Ox.

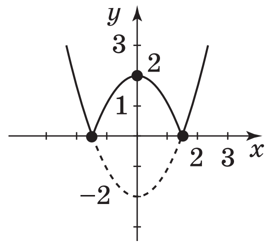


Рис. 5.54

б) Строим график $y = x^2 - 2x$ (см. пример *5в*). Далее часть графика правее оси Oy — без изменения, и эту же часть симметрично отображаем относительно оси Oy (рис. 5.55).

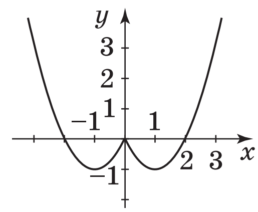


Рис. 5.55

Рассмотрим примеры, в которых по эскизу графика $y = ax^2 + bx + c$ необходимо определить **знаки коэффициентов** $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Пример 7. По эскизу графика $y = ax^2 + bx + c$ определить знаки a, b и c.

а) По эскизу видно, что ветви параболы направлены вверх, значит, $a > 0$ (рис. 5.56).

По теореме Виета $\dfrac{-b}{a} = x_1 + x_2$.

По эскизу видно, что $x_2 > 0$, $x_1 < 0$, причем $|x_2| > |x_1|$. Значит, $x_1 + x_2 > 0$. $a > 0$, $-\dfrac{b}{a} < 0$, значит, $b > 0$.

Если $x = 0$, то $y = c$. По эскизу видно, что $c < 0$.

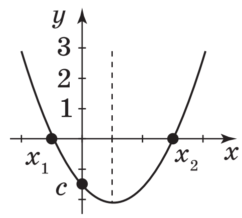


Рис. 5.56

Ответ: $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.

б) Ветви параболы направлены вниз, $a < 0$. По эскизу видно, что $c < 0$ (рис. 5.57).

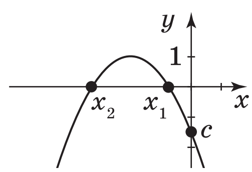


Рис. 5.57

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

$x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, т. е. $x_1 + x_2 < 0$, тогда $\dfrac{b}{a} > 0$.

Так как $a < 0$, то $b < 0$.

Ответ: $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$.

в) $a < 0$, поскольку ветви параболы направлены вниз (рис. 5.58).

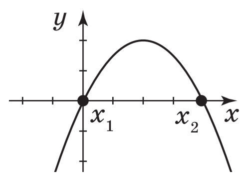


Рис. 5.58

$x_1 = 0$, значит, $x_1 \cdot x_2 = 0$, $c = 0$.

$x_2 > 0$, поэтому $x_1 + x_2 > 0$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{b}{a} < 0$. $a < 0$, значит, $b > 0$.

Ответ: $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$.

г) Очевидно, что $a > 0$ (ветви параболы направлены вверх), по эскизу $c < 0$ (рис. 5.59).

$x_1 = -x_2$, значит, $b = 0$.

Ответ: $a > 0$, $b = 0$, $c < 0$.

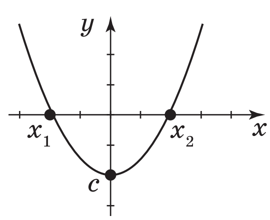


Рис. 5.59

5.1.8. График функции $y = \sqrt{x}$

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график (рис. 5.60).

x	0	0,25	1	4	9
y	0	0,5	1	2	3

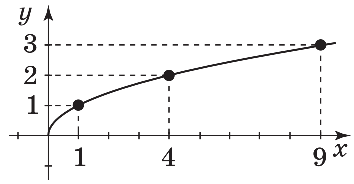
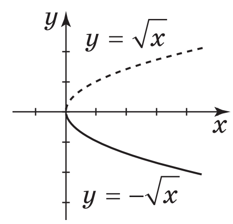
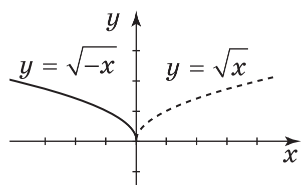
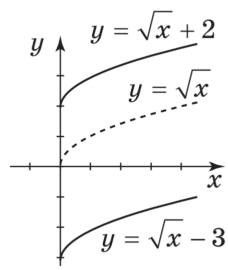
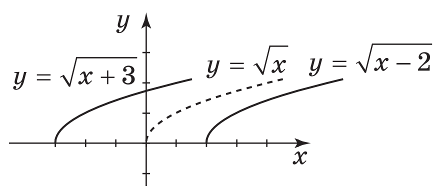


Рис. 5.60

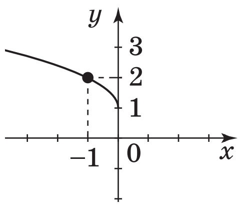
1. Область определения — множество всех неотрицательных чисел: $D(f) = [0; +\infty)$.
2. Область значений: $E(f) = [0; +\infty)$.
3. График функции — ветвь параболы.
4. График проходит через начало координат и расположен в первой четверти координатной плоскости.
5. Функция возрастает на всей области определения, т. е. $[0; +\infty)$.

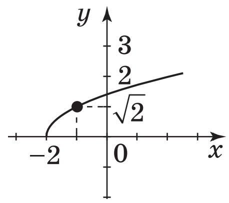
На примере графика $y = \sqrt{x}$ рассмотрим основные виды преобразований графика $y = f(x)$.

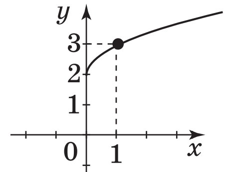
Вид преобразования	**Действие**	**Преобразование** $y = \sqrt{x}$
$y = -f(x)$	Симметрия относительно оси Ox	
$y = f(-x)$	Симметрия относительно оси Oy	
$y = f(x) + n$	Параллельный перенос вдоль оси Oy на n единиц	
$y = f(x + m)$	Параллельный перенос вдоль оси Ox на $-m$ единиц	

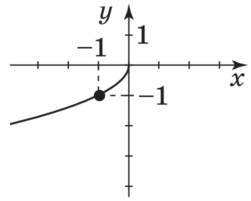
Пример 1. Построить графики функций:
а) $y = \sqrt{-x} + 1$; б) $y = \sqrt{x+2}$; в) $y = \sqrt{x} + 2$; г) $y = -\sqrt{-x}$.

Используя таблицу, получим следующие графики:

а) 

б) 

в) 

г) 

Пример 2. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, сравнить числа:

а) $\sqrt{3,7}$ и $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}$ и 2,5; в) $-\sqrt{3}$ и $-\sqrt{2}$; г) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{17}$.

Решение:

а) Функция $y = \sqrt{x}$ — возрастающая, поэтому если $5 > 3{,}7$, то $\sqrt{5} > \sqrt{3{,}7}$.

б) $2{,}5 = \sqrt{6{,}25}$; $6{,}25 > 5$, поэтому $\sqrt{6{,}25} > \sqrt{5}$ и $2{,}5 > \sqrt{5}$.

в) Функция $y = -\sqrt{x}$ убывающая, поэтому если $3 > 2$, то $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$.

г) $\sqrt{2} > -\sqrt{17}$, поскольку любое положительное число больше любого отрицательного.

Пример 3. Построить график функции:

а) $y = \sqrt{x^2}$; б) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$; в) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

Решение:

а) $y = \sqrt{x^2}$ (рис. 5.61). Область определения этой функции — все действительные числа; множество значений: $y \ge 0$. $y = \sqrt{x^2} = |x|$.

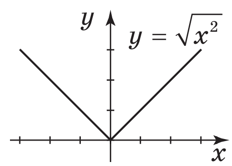


Рис. 5.61

б) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$ (рис. 5.62). Область определения этой функции — множество всех неотрицательных чисел: $x \ge 0$. Множество значений: $y \ge 0$.

$$y = \left(\sqrt{x}\right)^2 = \begin{cases} x, \ x \ge 0, \\ \text{не существует, если } x < 0. \end{cases}$$

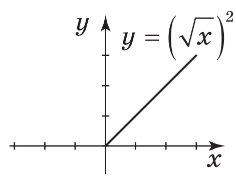


Рис. 5.62

в) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ (рис. 5.63). Область определения функции: $x > 0$. Множество значений: $y > 0$. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \begin{cases} \sqrt{x}, \\ x > 0. \end{cases}$

То есть это график функции $y = \sqrt{x}$ при условии, что $x \ne 0$, т. е. с «выколотой» точкой (0; 0).

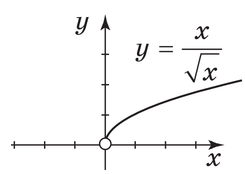


Рис. 5.63

Пример 4. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 + 1} = a$.

Решение:

Если $a < 0$, уравнение решения не имеет.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $x^2 + 1 = a$; $x^2 = a - 1$.

Если $a < 1$ — решений нет.

Если $a = 1$ — одно решение: $x = 0$.

Если $a > 1$, $x = \pm\sqrt{a - 1}$.

Ответ: решений нет при $a < 1$; одно решение: $x = 0$ при $a = 1$; два решения: $x = \pm\sqrt{a - 1}$ при $a > 1$.

5.1.9. График функции $y = \sqrt[3]{x}$

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$, ее свойства и график.

x	-8	-1	0	1	8
y	-2	-1	0	1	2

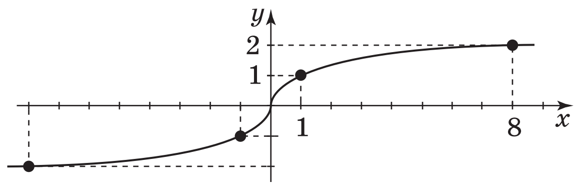


Рис. 5.64

1. Область определения — множество всех действительных чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Множество значений — множество всех действительных чисел: $y \in (-\infty; +\infty)$.
3. Функция нечетная, поскольку $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.
4. Функция возрастающая.
5. График проходит через начало координат (0; 0).
6. $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$.
7. Наибольших и наименьших значений нет.

Пример 1. Построить графики функций:

а) $y = -\sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[3]{x-1}$; в) $y = \sqrt[3]{x} - 1$; г) $y = -\sqrt[3]{x+2} + 2$.

Решение:

а) График $y = -\sqrt[3]{x}$ получим путем отображения графика $y = \sqrt[3]{x}$ симметрично относительно оси Ox (рис. 5.65).

б) График функции $y = \sqrt[3]{x-1}$ получим с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox на 1 единицу вправо (рис. 5.66).

в) График функции $y = \sqrt[3]{x} - 1$ получим с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy на 1 единицу вниз (рис. 5.67).

г) График функции $y = -\sqrt[3]{x+2} + 2$ получим с помощью параллельного переноса графика $y = -\sqrt[3]{x}$ вдоль оси Ox на 2 единицы влево и вдоль оси Oy на 2 единицы вверх (рис. 5.68).

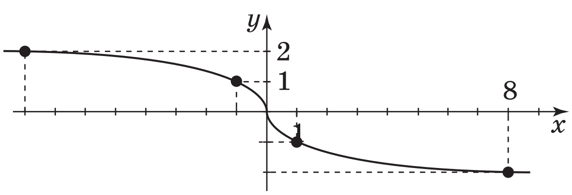


Рис. 5.65

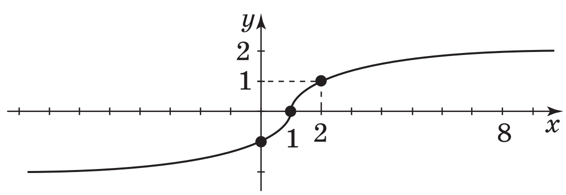


Рис. 5.66

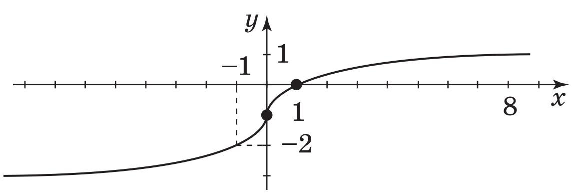


Рис. 5.67

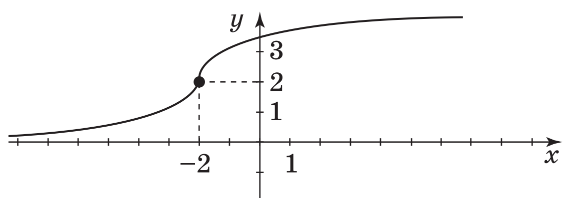


Рис. 5.68

Пример 2. Решить графически уравнение: $\sqrt[3]{x} = -x + 2$.

Решение:

Построим графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = -x + 2$ в одной системе координат. Абсцисса точек пересечения этих графиков — корень данного уравнения (рис. 5.69).

Ответ: 1.

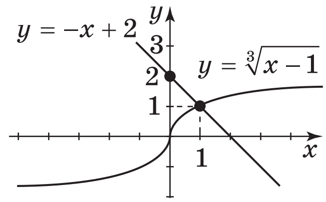


Рис. 5.69

5.1.10. График функции y = |x|

Рассмотрим функцию $y = |x|$, ее свойства и график (рис. 5.70).

По определению модуля: $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Поэтому график функции $y = |x|$:

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

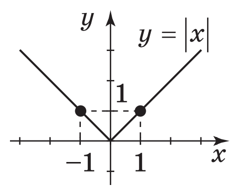
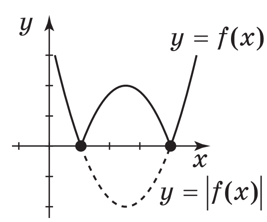
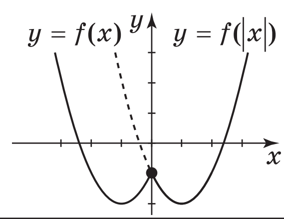


Рис. 5.70

1. Область определения — множество всех действительных чисел: $D(f) = R$.
2. Множество значений — множество всех неотрицательных чисел: $y > 0$.
3. Функция четная, поскольку $|-x| = |x|$.
4. Функция убывает на $x \in (-\infty; 0]$, возрастает на $x \in [0; +\infty)$.
5. Наименьшее значение функции $y = 0$ при $x = 0$. Наибольшего значения нет.

Рассмотрим построение графиков с модулями вида $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$.

Вид преобразования	Действие	Пример
$y = \|f(x)\|$	График $y = \|f(x)\|$ получаем из графика $y = f(x)$: часть графика выше оси Ox оставляем без изменения, а **часть графика ниже** Ox отображаем **симметрично** относительно **оси Ox**	
$y = f(\|x\|)$	График функции $y = f(\|x\|)$ получаем из графика $y = f(x)$: часть графика правее оси Oy оставляем без изменения, далее **эту же** часть отображаем симметрично **относительно оси Oy**	

Пример 1. Построить графики функций: а) $y = |2x - 3|$; б) $y = 2|x| - 3$.

Построим график $y = 2x - 3$.

x	0	1,5
y	−3	0

а) $y = |2x - 3|$. Часть графика выше оси Ox оставим без изменения, ниже отобразим симметрично относительно оси Ox (рис. 5.71, *а*).

б) $y = 2|x| - 3$. Часть графика правее оси Oy оставим без изменения, левее — эта же часть симметрично относительно оси Oy (рис. 5.71, *б*).

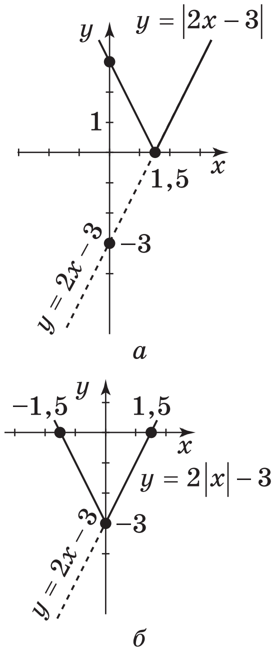


Рис. 5.71

Пример 2. Построить график функции:

$$y = -|x^2 - |x| - 6|.$$

Решение:

План построения:

1. Строим параболу $y = x^2 - x - 6$. Вершина параболы: $m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$; $n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 6 = 6{,}25$.
   Нули: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.
2. Строим график функции $y = x^2 - |x| - 6$.
3. Отображаем симметрично относительно Ox и получим $y = |x^2 - |x| - 6|$.
4. Симметрия относительно Ox: отобразим симметрично график $y = |x^2 - |x| - 6|$ в нижнюю полуплоскость относительно Ox. Получим график функции $y = -|x^2 - |x| - 6|$ (рис. 5.72).

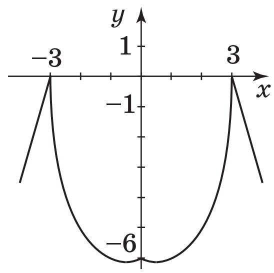


Рис. 5.72

Пример 3. Построить графики функций:

а) $y = \dfrac{|x|}{x}$; б) $y = x + \dfrac{|x|}{x}$; в) $y = \dfrac{-x-3}{|x+3|}$.

Решение:

а) $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1, \text{ если } x > 0, \\ \dfrac{-x}{x} = -1, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ $x \neq 0$ (рис. 5.73).

б) $y = x + \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} x + \dfrac{x}{x} = x + 1, \text{ если } x > 0, \\ x - \dfrac{x}{x} = x - 1, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ $x \neq 0$ (рис. 5.74).

в) $y = \dfrac{-x-3}{|x+3|} = \begin{cases} \dfrac{-x-3}{x+3} = -1, \text{ при } x > -3, \\ \dfrac{-x-3}{-x-3} = 1, \text{ при } x < -3; \end{cases}$ $x \neq -3$ (рис. 5.75).

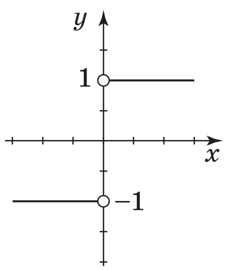


Рис. 5.73

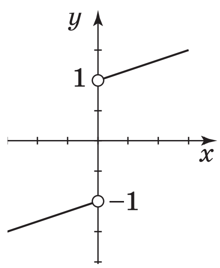


Рис. 5.74

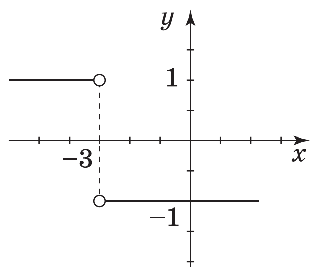


Рис. 5.75

Построение графиков с модулями методом интервалов

Пример 4. Построить график функции $y = |x - 1| + |x + 2|$.

Решение:

а) Разобьем числовую прямую на промежутки числами $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$ (нули подмодульных выражений, т. е. числа, где функция меняет знак):

$x - 1 < 0$	$x - 1 < 0$	$x - 1 > 0$
$x + 2 < 0$	$x + 2 > 0$	$x + 2 > 0$

$$y = |x - 2| + |x + 2|$$

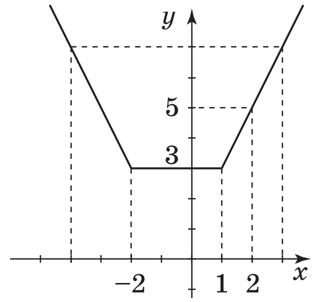


Рис. 5.76

б) На каждом промежутке подмодульное выражение сохраняет знак:

- $x < -2$; $x - 2 < 0$ и $x + 2 < 0$,
  тогда $|x - 1| + |x + 2| = -x + 1 - x - 2 = -2x - 1$.

$$y = -2x - 1$$

x	-3	-4
y	5	7

- $-2 \le x \le 1$; $x - 1 < 0$; $x + 2 > 0$.
  $-x + 1 + x + 2 = 3$; $y = 3$.
- $x > 1$; $x - 1 > 0$; $x + 2 > 0$; $x - 1 + x + 2 = 2x + 1$; $y = 2x + 1$.

$$y = 2x + 1$$

x	2	3
y	5	7

Значит, на промежутке $x < -2$ строим график $y = -2x - 1$, при $-2 \le x \le 1$ график $y = 3$, $x > 1$, график $y = 2x + 1$.

График $y = |x - 1| + |x + 2|$ представляет собой ломаную, состоящую из лучей и отрезков, указанных графиков (рис. 5.76).

5.1.11. Использование графиков функций для решения уравнений и систем

Графики функций используются для решения уравнений, систем уравнений графическим способом.

Решение уравнений графическим способом позволяет найти точное или приближенное значение корней, а также ответить на вопрос, сколько корней имеет уравнение.

Для решения уравнения «делим» уравнение на две части, вводим две функции, строим их графики, находим координаты точек пересечения графиков. Абсциссы этих точек и есть корни уравнения.

Пример 1. Решить уравнение: $x^3 + 2x - 3 = 0$.

Решение:

«Разделим» уравнение на две части:

$$x^3 = -2x + 3.$$

Введем функции: $y = x^3$ и $y = -2x + 3$. Построим графики этих функций, они пересеклись в точке с абсциссой 1 (рис. 5.77).

Ответ: 1.

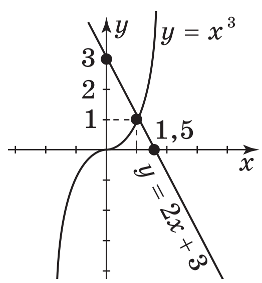


Рис. 5.77

Пример 2. Решить уравнение: $\sqrt[3]{x} + x - 10 = 0$.

Решение:

Запишем уравнение в виде: $\sqrt[3]{x} = 10 - x$.

Построим графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = 10 - x$.

x	5	8
y	5	2

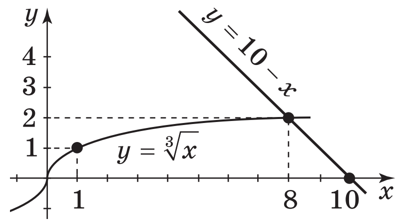


Рис. 5.78

Графики пересеклись в точке с координатой 8 (рис. 5.78).
Ответ: 8.

С помощью графиков удобно решать уравнения, содержащие переменную **под знаком модуля.**

Пример 3. Решить уравнение: $||x - 1| - 1| = 1$.

Решение:

Построим графики функций $y = ||x - 1| - 1|$ и $y = 1$ (рис. 5.79).

Чтобы построить график $y = ||x - 1| - 1|$, построим последовательно:
а) $y = x - 1$;
б) $y = |x - 1|$;
в) $y = |x - 1| - 1$ (перенос $\downarrow 1$);
г) $y = ||x - 1| - 1|$.

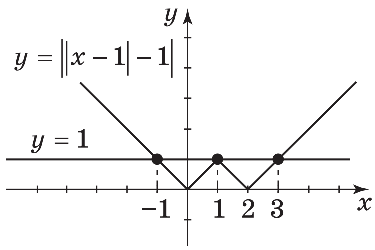


Рис. 5.79

Видно, что уравнение имеет три корня: –1; 1 и 3.
Ответ: –1; 1; 3.

При решении уравнений **с параметрами** часто необходимо ответить на вопрос **о количестве корней** уравнения. Это удобно делать с помощью графика.

Пример 4. Найти сумму целых значений числа a, при которых уравнение $|x^2 - 2x - 3| = a$ имеет четыре корня.

Решение:

а) Построим параболу $y = x^2 - 2x - 3$. Ветви параболы направлены вверх, вершина $m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$;
$n = 1 - 2 - 3 = -4$. Нули: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

б) График $y = |x^2 - 2x - 3|$ получим, если часть параболы выше оси Ox оставим без изменения, ниже оси отобразим симметрично относительно оси Ox.

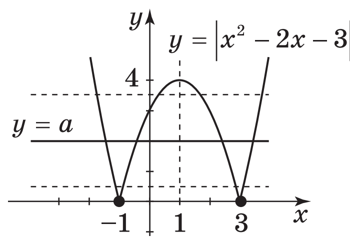


Рис. 5.80

в) График функции $y = a$ — прямая, параллельная оси абсцисс. Графики имеют четыре общие точки (а уравнение — четыре корня), если $0 < a < 4$ (рис. 5.80). Целые значения этого интервала — 1; 2 и 3. Находим их сумму: $1 + 2 + 3 = 6$.
Ответ: 6.

С помощью графиков функций решаются и системы уравнений. Решение систем линейных уравнений уже рассматривалось. Рассмотрим системы нелинейных уравнений графическим способом.

Графический способ решения систем уравнений

Алгоритм решения систем уравнений графическим способом:

1. Выразить в каждом уравнении неизвестное y через x.
2. Построить графики каждого уравнения системы.
3. Найти координаты точек пересечения построенных графиков (если они пересекаются). Полученные точки и есть решения системы.

Пример 5. Изобразить схематично графики функций, определить количество решений системы:

а) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = \dfrac{1}{2}x + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = -x^2 + 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = -8, \\ y = 4x. \end{cases}$

Решение:

а) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = \dfrac{1}{2}x + 3. \end{cases}$ $y = x^2 + 1$ — парабола, ветви направлены вверх, получена из графика функции $y = x^2$ переносом на единицу вверх вдоль оси Oy.

$y = \dfrac{1}{2}x + 3$ — прямая, полученная из графика функции $y = \dfrac{1}{2}x$ переносом на 3 единицы вверх вдоль оси Oy.

Графики пересекаются в двух точках (рис. 5.81).

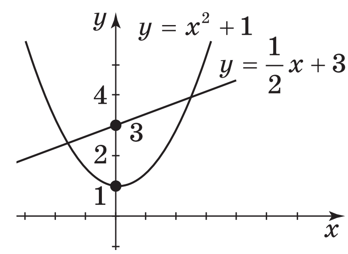


Рис. 5.81

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = -x^2 + 8. \end{cases}$ $x^2 + y^2 = 25$ — окружность с центром в начале координат и радиусом 5.

$y = -x^2 + 8$ — парабола ветвями вниз, получена из графика $y = -x^2$ переносом вверх по оси Oy на 8 единиц.

Графики пересекаются в четырех точках (рис. 5.82).

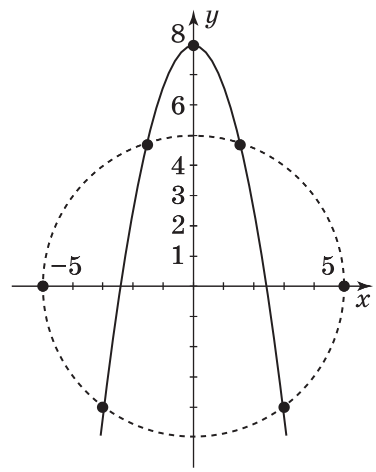


Рис. 5.82

в) $\begin{cases} xy = -8, \\ y = 4x. \end{cases}$ Перепишем $xy = -8$ в виде $y = -\dfrac{8}{x}$.

Это гипербола, ветви которой расположены во II и IV координатных плоскостях.

$y = 4x$ — график прямой пропорциональности, расположен в I и III четвертях. Графики данных функций не пересекаются (рис. 5.83).

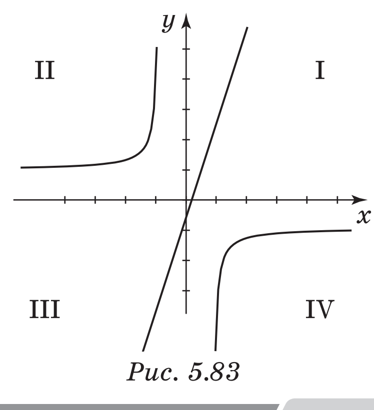


Рис. 5.83

Ответ: а) 2; б) 4; в) решений нет.

Пример 6. Решить систему уравнений: $\begin{cases} y = -x^2 + 4, \\ y = 3x + 4. \end{cases}$

Решение:

Построим графики данных функций.

$y = -x^2 + 4$ получаем из графика $y = -x^2$ переносом вдоль оси Oy на 4 единицы вверх.

$y = 3x + 4;$

x	0	−1
y	4	4

Графики пересеклись в точках с координатами (−3; −5) и (0; 4) (рис. 5.84).

Ответ: (−3; −5); (0; 4).

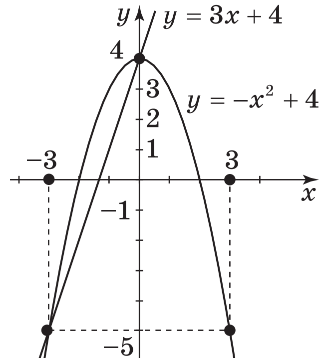


Рис. 5.84

Решение систем уравнений с параметром

Пример 7. Указать количество решений системы в зависимости от параметра a:

$$\begin{cases} y = \begin{cases} -x^2, \ -2 \le x \le 2, \\ 3x - 10, \ x > 2, \\ -3x - 10, \ x < -2; \end{cases} \\ y = a. \end{cases}$$

Решение:

$$y = \begin{cases} -x^2, \ -2 \le x \le 2, \\ 3x - 10, \ x > 2, \\ -3x - 10, \ x < -2. \end{cases}$$ Это график, заданный кусочно. На промежутке $-2 \le x \le 2$ парабола $y = -x^2$.

При $x > 2$ $y = 3x - 10$:

x	3	4
y	−1	2

При $x < -2$ $y = -3x - 10$:

x	−3	−4
y	−1	2

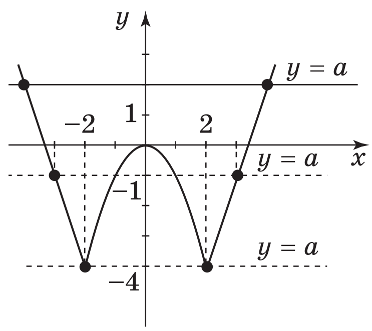


Рис. 5.85

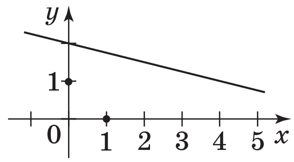
Прямая $y = a$ параллельна оси абсцисс.

По рис. 5.85 видно, что при $a < -4$ графики не пересекаются, при $a = -4$ две точки пересечения; $-4 < a < 0$ — четыре точки пересечения, $a = 0$ — три точки пересечения и $a > 0$ — две точки пересечения.

Ответ: а) решений нет при $a < -4$; б) два решения при $a = -4$ и $a > 0$; в) четыре решения при $-4 < a < 0$; г) три решения при $a = 0$.

Тренировочные тестовые задания к разделу 5

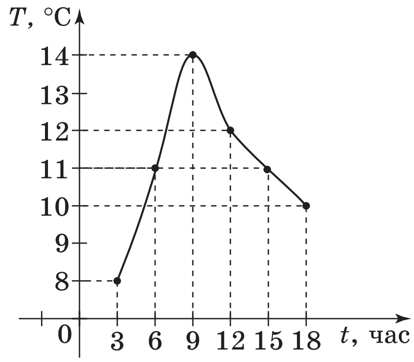
1. График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = \frac{1}{4}x + 2$ 2) $y = \frac{1}{4}x - 2$ 3) $y = -\frac{1}{4}x + 2$ 4) $y = -\frac{1}{4}x - 2$

2. На рисунке показано, как менялась температура воздуха с 3 часов до 18 часов. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Сколько часов температура превышала 11 °C?

1) 3 3) 9
2) 6 4) 15

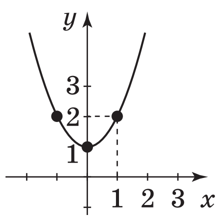


3. В какой координатной четверти находится точка пересечения прямых $y = -2x - 5$ и $y = x + 9$?

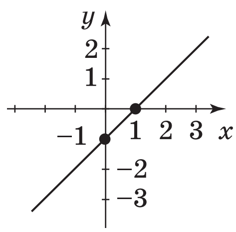
1) в I четверти 3) в III четверти
2) во II четверти 4) в IV четверти

4. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

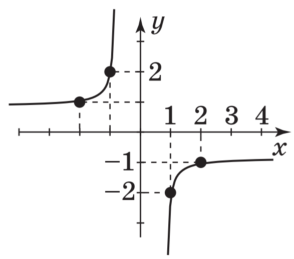
А.



Б.



В.

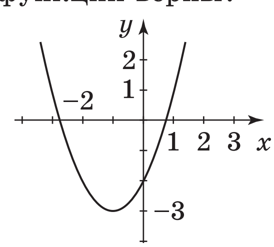


1) $y = |x|$ 2) $y = x^2 + 1$ 3) $y = -\frac{2}{x}$ 4) $y = x + 1$

Ответ:

А	Б	В

5. На рисунке изображен график квадратичной функции $y = f(x)$. Какие из следующих утверждений о данной функции верны?



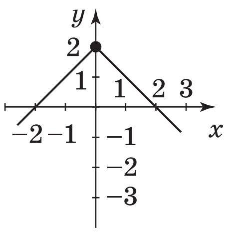
1) $f(-5) < f(1)$
2) Функция возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.
3) Наименьшее значение функции равно -3.

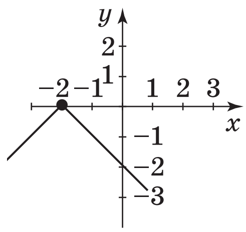
6. Какая из данных прямых не имеет общих точек с параболой $y = x^2 + 11x + 25$?
1) $x = -1$ 2) $y = x$ 3) $y = 4x - 3$ 4) $y = -5x + 3$

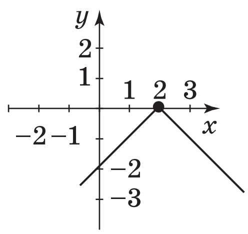
7. Укажите нечетную функцию.
1) $y = x^2 + 3$ 2) $y = -\dfrac{x^2 + 2}{4}$ 3) $y = \sqrt{x + 1}$ 4) $y = x^3 + 2x$

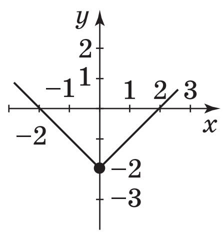
8. Какая из данных прямых имеет ровно одну общую точку с окружностью $x^2 + y^2 = 10$?
1) $y = x + 2$ 2) $y = -3x + 18$ 3) $y = 2x - 3$ 4) $y = 3x - 10$

9. Какой из изображенных графиков является графиком функции $y = -|x + 2|$?

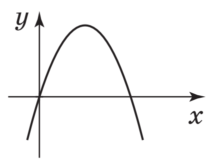
1) 

2) 

3) 

4) 

10. По виду графика $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a, b и c. Выберите правильное утверждение.



1) $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$

11. Укажите наименьшее значение области определения функции $y = \sqrt{x + 3}$.
Ответ: ________________.

12. Найдите значение функции $y = x^2 + x + 1$, если абсцисса равна -1.
Ответ: ________________.

13. Сколько нулей имеет функция $y = x^2 - 2x$?
Ответ: ________________.

14. При каких x функция $y = 2x - 4$ принимает неотрицательные значения?
Ответ: ________________.

15. Укажите наибольшее значение функции $y = -x^2 + 8$.
Ответ: ________________.

16. Укажите промежуток убывания функции $y = x^2 - 2x + 3$.
Ответ: ________________.

17. Не выполняя построения графика функции $y = 2x + 1$, найдите точку этого графика, в которой абсцисса в три раза меньше ординаты.
Ответ: ________________.

18. Известно, что график функции $y = kx + b$ проходит через точку $A(1; -1)$ и параллелен графику функции $y = 2x + 7$. Найдите b.
Ответ: ________________.

6. Координаты на прямой и плоскости

Знать:

- понятие о координатах, точки на прямой и на плоскости;
- определение основных видов числовых промежутков;
- формулы координат середины отрезка, расстояния между точками;
- уравнение прямой;
- уравнение окружности;
- уравнения и неравенства с двумя переменными.

Уметь:

- объяснять и иллюстрировать понятие координатной прямой, модуля числа и декартовой системы координат;
- использовать формулы координат середины отрезка, расстояния между точками, уравнения прямой и окружности для решения задач;
- использовать координатный метод для задач на вычисление;
- строить графики уравнений и неравенств с двумя переменными.

6.1. Координатная прямая

6.1.1. Изображение чисел точками координатной прямой

Координатной прямой называется прямая, на которой заданы начало отсчета (точка O), положительное направление и единичный отрезок (рис. 6.1).

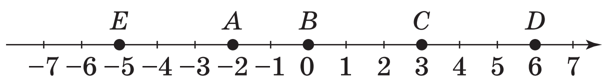


Рис. 6.1

Число, показывающее положение точки на координатной прямой, называют **координатой этой точки**.

Например, $A(-2)$; $B(0)$; $C(3)$; $D(6)$; $E(-5)$.

Примеры координатной прямой — термометр, «линия времени» на уроках истории.

Числа, которые расположены правее начала отсчета, называют **положительными**, а левее — **отрицательными**.

Все положительные числа и нуль называют **неотрицательными**, пишут:

$$a \geq 0;\ 3 \geq 0;\ 0 \geq 0.$$

Все отрицательные числа и нуль называют **неположительными**, пишут:

$$a \leq 0;\ -7 \leq 0;\ 0 \leq 0.$$

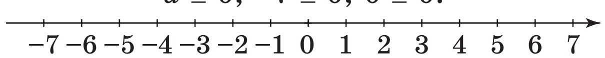


Рис. 6.2

Числа, которые лежат по разные стороны от нуля, но на одинаковом расстоянии, называют **противоположными**. Например, 5 и −5; 3 и −3; −2 и 2; 1,5 и −1,5.

Число нуль считается противоположным самому себе.

Выражение $-a$ означает, что записано число, противоположное числу a:

$$-(-a) = a, \text{ т. е. } -(-12) = 12.$$

Для каждого числа существует соответственное ему противоположное число.

Пример 1. Записать координаты точек A, B, C, D, E, F, M, K, изображенных на рис. 6.3.

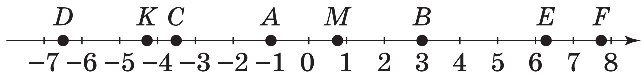


Рис. 6.3

Ответ: $A(-1)$; $B(3)$; $C(-3{,}5)$; $D(-6{,}5)$; $E(6{,}25)$; $F(7{,}75)$; $M(0{,}75)$; $K(-4{,}25)$.

Пример 2. Начертить координатную прямую, взяв за единичный отрезок шесть клеточек тетради, обозначить точки: $A(1)$; $B(-1)$; $C(-0{,}5)$; $D\left(\frac{2}{3}\right)$; $E\left(-1\frac{1}{6}\right)$; $F\left(2\frac{1}{3}\right)$; $M\left(-1\frac{2}{3}\right)$; $P\left(-2\frac{1}{6}\right)$; $R\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Решение:

Если единица в данной задаче — шесть клеточек, то точка $C(-0{,}5)$ будет расположена: $6 \cdot (-0{,}5) = -3$, т. е. на три клеточки левее нуля.

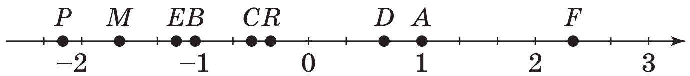


Рис. 6.4

Положение точки D получим аналогично: $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ клеточки вправо от нуля.

Точка E расположена левее числа −1 на: $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ клеточку.

Аналогично находим расположение точек F, M, P и R.

Пример 3. Длина единичного отрезка 5 см. Чему равно расстояние между точками: а) $A(1)$ и $B(7)$; б) $C(-3)$ и $D(-1)$; в) $M(-6)$ и $N(2)$?

Решение:

а) $AB = (7 - 1) \cdot 5$ см $= 6 \cdot 5 = 30$ (см);
б) $CD = (-1 - (-3)) \cdot 5 = (-1 + 3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10$ (см);
в) $MN = (2 - (-6)) \cdot 5 = (2 + 6) \cdot 5 = 40$ (см).

Пример 4. На координатной прямой обозначили числа −8 и 12 (рис. 6.5). Какая из точек является началом отсчета? Записать координаты точек A, B, C, D.

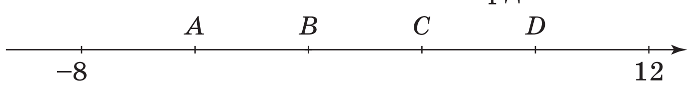


Рис. 6.5

Решение:

Расстояние от точки с координатой −8 до точки с координатой −12 составляет 5 отрезков или: $12 - (-8) = 20$ единиц. Значит, каждый отрезок содержит: $20 : 5 = 4$ единичных отрезка. Тогда координаты точек: $A(-4)$; $B(0)$; $C(4)$; $D(8)$. Начало отсчета — точка B.

Пример 5. Найти координаты точки C (рис. 6.6).

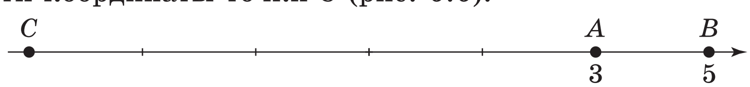


Рис. 6.6

Решение:

Длина $AB = 5 - 3 = 2$ единичных отрезка. Между C и B 6 отрезков величиной AB, т. е. 12 единичных отрезков. Координаты точки C: $5 - 12 = -7$.

Ответ: $C(-7)$.

Пример 6. Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой A (рис. 6.7)?
1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{8}$; 3) $\sqrt{11}$; 4) $\sqrt{14}$.

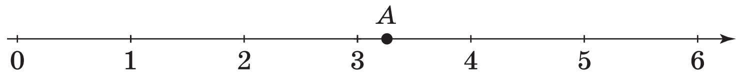


Рис. 6.7

Решение:

1) $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$, т. е. $1 < \sqrt{2} < 2$;

2) $\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$, т. е. $2 < \sqrt{8} < 3$;

3) $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$, т. е. $3 < \sqrt{11} < 4$, т. е. именно здесь отмечена точка A.

Ответ: 3) $A\left(\sqrt{11}\right)$.

Пример 7. На координатной прямой отмечена точка a (рис. 6.8).

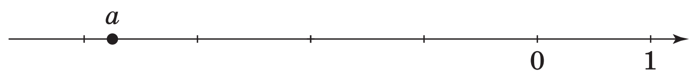


Рис. 6.8

Какое утверждение относительно этого числа является верным?

1) $a + 2 > 0$;
2) $8 - a < 0$;
3) $5 + a > 0$;
4) $a + 7 < 0$.

По рисунку видно, что число a принадлежит промежутку $-4 < a < -3$, тогда:
1) $-4 + 2 < a + 2 < -3 + 2$; $-2 < a + 2 < -1$, т. е. $a + 2 < -1$, а не $a + 2 > 1$. Неверно.
2) $8 - a < 0$. Неверно, т. к. $8 - a > 0$, поскольку $a < 0$.
3) $5 + a > 0$. Верно, поскольку $a > -4$, т. е. $a + 5 > 1$.
4) $a + 7 < 0$. Неверно, $a > -4$, тогда $a + 7 > 3$.
Ответ: 3) $5 + a > 0$.

6.1.2. Геометрический смысл модуля

Модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки $A(a)$ (рис. 6.9).

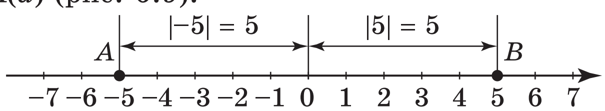


Рис. 6.9

Модуль числа a обозначают $|a|$. Модуль числа 5 равен 5, поскольку $B(5)$ удалена от начала отсчета на 5 единичных отрезков. Модуль числа -5 тоже равен 5, поскольку удален от начала отсчета на 5 единичных отрезков.

Модули противоположных чисел равны:

$$|3| = |-3|;\ |-2{,}1| = |2{,}1|;\ |100{,}5| = |-100{,}5|$$

Поскольку модуль числа — это **расстояние**, он не может быть отрицательным. Для положительного числа и нуля модуль равен самому числу, а для отрицательного — противоположному числу:

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}}$$

Пример 1. Найти значение выражения:
а) $|-3{,}7| - |-3{,}5| = 3{,}7 - 3{,}5 = 0{,}2$;

б) $|-2{,}14| \cdot |5| = 2{,}14 \cdot 5 = 10{,}7$;

в) $\left|-1\dfrac{20}{21}\right| - \left|3\dfrac{1}{7}\right| = 1\dfrac{20}{21} - 3\dfrac{1}{7} = 1\dfrac{20}{21} - 3\dfrac{3}{21} = -\left(2\dfrac{24}{21} - 1\dfrac{20}{21}\right) = -1\dfrac{4}{21}$.

Пример 2. Решить уравнение:

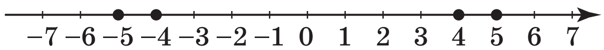
а) $|x| = 3{,}7$; $x_1 = 3{,}7$; $x_2 = -3{,}7$;

б) $|x| = -1{,}5$; решений нет;

в) $|x| = 0$; $x = 0$.

Пример 3. Обозначить на координатной прямой целые значения x, удовлетворяющие неравенству:

1) $|x| \le 5$. *Ответ*: 

2) $3{,}2 < |x| < 5{,}7$. *Ответ*: 

Пример 4. Указать наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $|x| + 5{,}7$; б) $2{,}3 - |x|$.

Решение:

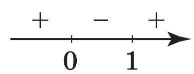
а) $|x| \ge 0$. Наименьшее его значение $|x| = 0$, поэтому выражение принимает наименьшее значение 5,7; наибольшего значения нет.

б) Аналогично, поскольку $|x| \ge 0$, выражение имеет наибольшее значение 2,3, а наименьшего значения нет.

Пример 5. Записать выражение $|x^2 - x|$ без знака абсолютной величины.

Решение:

По определению модуля: $|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, \text{ если } x^2 - x \ge 0, \\ -x^2 + x, \text{ если } x^2 - x < 0. \end{cases}$

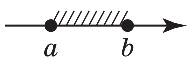
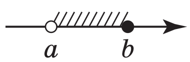
Решим неравенство: $x^2 - x \ge 0$; $x(x - 1) \ge 0$; $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ 

Ответ: $|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, \text{ если } x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty), \\ -x^2 + x, \text{ если } x \in (0; 1). \end{cases}$

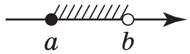
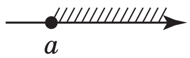
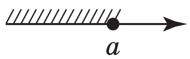
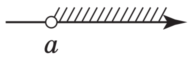
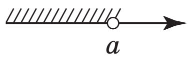
6.1.3. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч

Числовые отрезки, интервалы, полуинтервалы и лучи называют **числовыми промежутками.**

Обозначения числовых промежутков и их названия приведены в таблице.

Название числового промежутка	Изображение на координатной прямой	Обозначение	Запись в виде неравенства	Читается
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$	Интервал от a до b
Числовой отрезок		$[a; b]$	$a \le x \le b$	Отрезок от a до b
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \le b$	Полуинтервал от a до b, включая b

Окончание таблицы

Название числового промежутка	**Изображение на координатной прямой**	**Обозначение**	**Запись в виде неравенства**	**Читается**
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \le x < b$	Полуинтервал от a до b, включая a
Числовой луч		$[a; +\infty)$	$x \ge a$	Числовой луч от a до плюс бесконечности
Числовой луч		$(-\infty; a]$	$x \le a$	Числовой луч от минус бесконечности до a
Открытый числовой луч		$(a; +\infty)$	$x > a$	Открытый числовой луч от a до плюс бесконечности
Открытый числовой луч		$(-\infty; a)$	$x < a$	Открытый числовой луч от минус бесконечности до a
Числовая прямая		$(-\infty; +\infty)$	x — любое число	Числовая прямая

Для того чтобы рассмотреть примеры пересечения и объединения числовых промежутков, рассмотрим понятия пересечения и объединения множеств.

Под **множеством** в математике понимают совокупность любых предметов, объектов, чисел, объединенных между собой некоторым общим для них признаком.

Например, множество учащихся одной школы, множество целых чисел.

Множество считается **заданным**, если указано некоторое свойство, которое имеют все элементы, а другие объекты не обладают этим свойством.

Например, запись $A = \{x: -3 \le x \le 7\}$ означает, что множество A состоит из всех чисел x, которые удовлетворяют неравенству $-3 \le x \le 7$.

Множество, имеющее определенное количество элементов, называется **конечным**. Если множество имеет бесконечное количество элементов, то оно называется **бесконечным**.

Например, множество однозначных натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ конечно, а множество всех действительных чисел бесконечно.

Множество, не имеющее ни одного элемента, называют **пустым** и обозначают $\varnothing$.

Например, множество корней уравнения $\dfrac{x+2}{x^2-4} = 0$ является пустым.

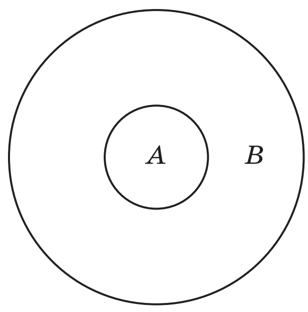


Рис. 6.10

Если каждый элемент множества A содержится в множестве B, то A называется **подмножеством** $\boldsymbol{B}$.

Например, множество натуральных чисел является подмножеством целых чисел.

Пишут: $A \subset B$; $N \subset Z$.

Наглядно множества изображают с помощью диаграмм Эйлера (рис. 6.10—6.12).

Пересечением множества A и B называется множество, содержащее все общие элементы множеств A и B, и только их (рис. 6.11).

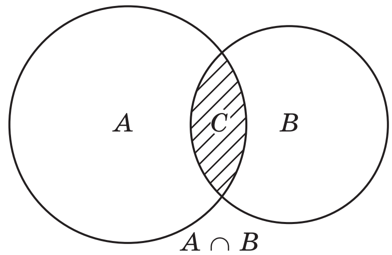


Рис. 6.11

Например, если $A = \{3, 4, 7, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 7, 8\}$, то $A \cap B = \{4, 7\}$.

Объединением множества A и B называется множество, состоящее из всех элементов, содержащихся **хотя бы** в одном из двух множеств A и B, и только их (рис. 6.12).

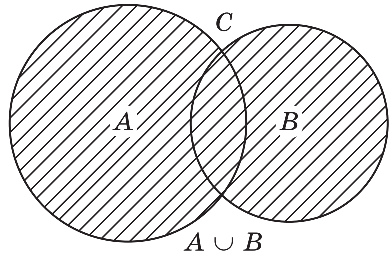


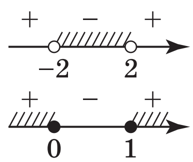
Рис. 6.12

Например, $A = \{3, 4, 7, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 7, 8\}$, то $A \cup B = \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

Рассмотрим примеры объединения и пересечения промежутков.

Пример 1. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ x^2 - x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)(x+2) < 0, \\ x(x-1) \ge 0. \end{cases}$$



Общее решение — пересечение этих числовых промежутков:

Ответ: $(-2; 0] \cup [1; 2)$.

Пример 2. Решить совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 1 < 3x - 2 \le 4, \\ -3 < 4x + 5 < 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3 < 3x \le 6, \\ -8 < 4x < -4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 1 < x \le 2, \\ -2 < x < -1. \end{array}\right.$$

Решением совокупности неравенств есть множество всех x, которые удовлетворяют хотя бы одному из неравенств, т. е. объединение промежутков решений неравенств.

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2]$.

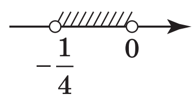
Пример 3. Решить неравенство: $\left|\dfrac{2x+5}{4x+1}\right| > 1.$

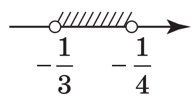
Решение:

Неравенство равносильно совокупности неравенств:

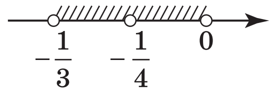
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{4x+1} > 1, \\ \dfrac{2x+1}{4x+1} < -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{4x+1} - 1 > 0, \\ \dfrac{2x+1}{4x+1} + 1 < 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1-4x-1}{4x+1} > 0, \\ \dfrac{2x+1+4x+1}{4x+1} < 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{-2x}{4x+1} > 0, \\ \dfrac{6x+2}{4x+1} < 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{x+\frac{1}{4}} < 0, \\ \dfrac{x+\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{4}} < 0; \end{array}\right.$$





Решением совокупности неравенств будет объединение этих промежутков:



Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

6.2. Декартовы координаты на плоскости

6.2.1. Декартовы координаты на плоскости. Координаты точки

Проведем на плоскости через точку O взаимно перпендикулярные прямые x и y — **оси координат**. x — ось абсцисс; y — ось ординат; точка O — начало координат (рис. 6.13).

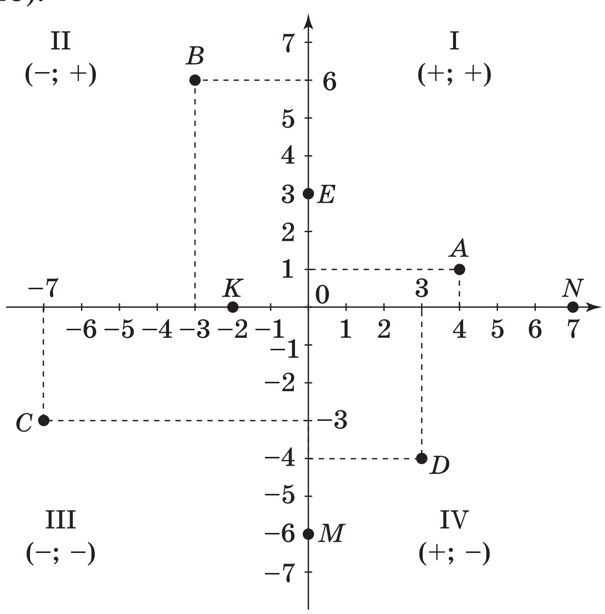


Рис. 6.13

Каждой точке плоскости можно сопоставить пару чисел — абсциссу x и ординату y. Эти числа называют **координатами** точек.

На рис. 6.13 изображены точки с координатами: $A(4; 1)$; $B(-3; 6)$; $C(-7; -3)$; $D(3; -4)$; $K(-2; 0)$; $E(0; 3)$; $N(7; 0)$; $M(0; -6)$.

Оси координат разбивают плоскость на четыре четверти: I, II, III и IV. В пределах одной четверти знаки x и y сохраняются.

Если точка лежит на оси x, то ее ордината равна нулю, если точка лежит на оси y, то ее абсцисса равна нулю. Так, точка $N(7; 0)$ лежит на оси x, а точка $E(0; 3)$ — на оси y.

Плоскость xy называют **координатной**, или **декартовой, плоскостью** по имени Р. Декарта, который впервые применил ее в своих исследованиях.

Пример 1. Из точки $A(4; -3)$ опущены перпендикуляры на оси x и y. Найти координаты оснований перпендикуляров.

Решение:

Проведем перпендикуляр из точки A к оси x, получим точку $A_1(4;\ 0)$, и к оси y — точку $A_2\,(0;\ -3)$ (рис. 6.14).

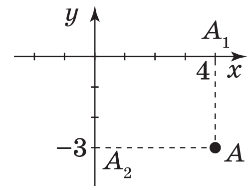


Рис. 6.14

Пример 2. Дана точка $M(2;\ 1)$. Найти точки, симметричные точке M относительно оси x, оси y и начала координат.

Решение:

На рис. 6.15 точка, симметричная точке $M(2;\ 1)$ относительно оси x, — точка $M_1(2;\ -1)$.

Точка, симметричная точке $M(2;\ 1)$ относительно оси y, — точка $M_2(-2;\ 1)$.

Точка, симметричная точке $M(2;\ 1)$ относительно начала координат, — точка $M_3(-2;\ -1)$.

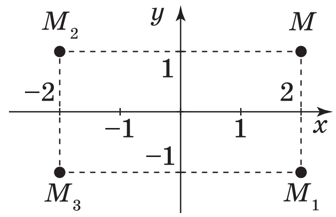


Рис. 6.15

Для некоторой точки $M(x;\ y)$ точка, симметричная ей относительно оси x, будет иметь координаты $M_1(x;\ -y)$; относительно оси y — $M_2(-x;\ y)$; относительно начала координат — $M_3(-x;\ -y)$.

Пример 3. Даны точки: $A(-1;\ 4)$; $B(2;\ -4)$; $C(0;\ 5)$; $D(-3;\ -3)$; $K(2;\ 2)$; $M(1;\ 1)$; $D(-7;\ 0)$; $P(-4;\ 10)$. В каких четвертях расположены точки? Какая из точек лежит на оси y, на оси y?

Решение:

В I четверти (знаки +; +): $M(1;\ 1)$. Во II четверти (знаки −; +): $P(-4;\ 10)$.

В III четверти (знаки −; −); $D(-3;\ -3)$. В IV четверти (знаки +; −): $B(2;\ -4)$.

На оси x (координаты $(x;\ 0)$): $D(-7;\ 0)$. На оси y (координаты $(0;\ y)$): $C(0;\ 5)$.

6.2.2. Координаты середины отрезка

Пусть дан отрезок AB с координатами его концов $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, точка $C(x_C;\ y_C)$ — середина отрезка AB (рис. 6.16).

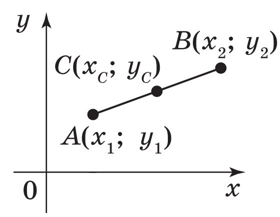


Рис. 6.16

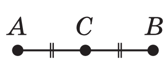
Координаты середины отрезка равны полусумме соответствующих координат его концов:

$$\boxed{x_C = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Опорные задачи

Задача 1. $A(-3;\ 1)$; $B(7;\ -5)$; $AC = BC$. $C(x_C;\ y_C)$ — ?

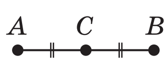
Решение:



$$x_C = \frac{-3+7}{2} = 2;\quad y_C = \frac{1-5}{2} = -2;\quad C(2;\ -2).$$

Задача 2. $A(2;\ -1)$; $B(1;\ 4)$; $AC = BC$. $B(x_B;\ y_B)$ — ?

Решение:



$$x_C = \frac{x_B + 2}{2} = 1;\quad y_C = \frac{y_C - 1}{2} = 4;$$

$$x_B + 2 = 2;\ x_B = 0;\ y_B - 1 = 8;\ y_B = 9.\ B(0;\ 9).$$

Все задачи на использование формул координат середины отрезка сводятся к решению задач 1 и 2.

Пример 1. Точка $M(2;\ 6)$ — середина отрезка, концы которого находятся на оси x и оси y. Найти координаты концов отрезка (рис. 6.17).

Решение:

Точка A находится на оси y, поэтому ее координаты $A(0;\ y_A)$, точка B — на оси x, ее координаты $B(x_B;\ 0)$. Точка $M(2;\ 6)$ — середина отрезка AB (опорная задача 2).

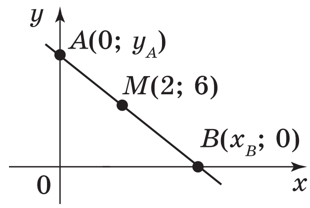


Рис. 6.17

По формулам координат середин отрезка:

$$\frac{x_B + 0}{2} = 2;\ x_B = 4;$$

$$\frac{y_A + 0}{2} = 6;\ y_B = 12.$$

Ответ: (4; 0) и (0; 12).

Пример 2. Доказать, что точки $A(2;\ 4)$, $B(1;\ 1)$, $C(-2;\ 0)$ и $D(-1;\ 3)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$ (рис. 6.18).

Доказательство:

Воспользуемся признаком параллелограмма: если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

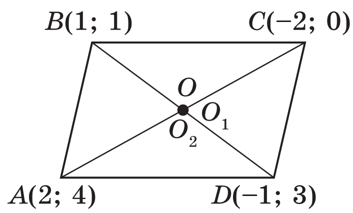


Рис. 6.18

То есть для данного случая середины диагоналей BD и AC должны совпадать с точкой их пересечения.

Найдем координаты точки O_1 — середины диагонали AC:

$$x_{O_1} = \frac{2-2}{2} = 0;\ y_{O_1} = \frac{4+0}{2} = 2;\ O_1(0;\ 2).$$

Найдем координаты точки O_2 — середины диагонали BD:

$$x_{O_2} = \frac{1-1}{2} = 0;\ y_{O_2} = \frac{1+3}{2} = 2;\ O_2(0;\ 2).$$

Точки O_1 и O_2 совпадают, т. е. диагонали AC и BD в точке пересечения делятся пополам, $ABCD$ — параллелограмм.

Пример 3. Даны точки $A(4;\ 2)$, $C(-4;\ 2)$, $D(7;\ -3)$ — вершины параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины B (рис. 6.19).

Решение:

Найдем координаты точки O — середины отрезка AC:

$$O(x_O;\ y_O);\ x_O = \frac{4-4}{2} = 0;\ y_O = \frac{2+2}{2} = 2;\ O(0;\ 2).$$

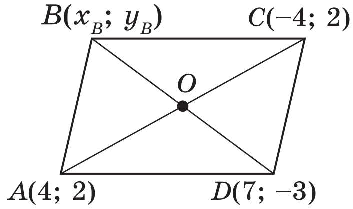


Рис. 6.19

Точка O — середина диагонали BD, поэтому:

$$\frac{x_B + 7}{2} = 0;\ x_B = -7;\ \frac{y_B - 3}{2} = 2;\ y_B - 3 = 4;\ y_B = 7.$$

Ответ: $B(-7;\ 7)$.

Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении

На рис. 6.20 дан отрезок AB с координатами концов $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Точка $C(x_C;\ y_C)$ делит отрезок в отношении $AC : BC = k$.

Координаты точки С, делящей отрезок в заданном отношении:

$$\boxed{x_C = \frac{1}{1+k}x_1 + \frac{k}{1+k}x_2;\ \ y_C = \frac{1}{1+k}y_1 + \frac{k}{1+k}y_2.}$$

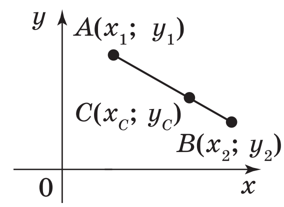


Рис. 6.20

Пример 4. Даны точки $A(1;\ -2)$; $B(0;\ 2)$. Известно, что $AC : BC = 4 : 1$. Найти координаты точки C.

Решение:

$$x_C = \frac{1}{1+4}\cdot 1 + \frac{4}{1+4}\cdot(-2) = \frac{1}{5} - \frac{8}{5} = -0,6;\ \ y_C = \frac{1}{1+4}\cdot 0 + \frac{4}{1+4}\cdot 2 = \frac{8}{5} = 1,3.$$

Ответ: $C(-0,6;\ 1,3)$.

6.2.3. Формула расстояния между двумя точками плоскости

Расстояние между точками плоскости $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ (рис. 6.21):

$$\boxed{d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

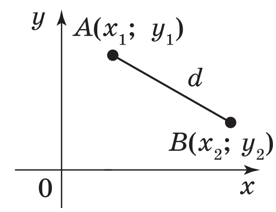


Рис. 6.21

Пример 1. $A(2;\ -7)$; $B(5;\ -3)$. AB — ?

Решение:

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (7-(-3))^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 2. Найти на оси абсцисс точку, равноудаленную от точки $A(1;\ 1)$ и точки $B(3;\ 5)$ (рис. 6.22).

Решение:

Поскольку точка лежит на оси абсцисс, она имеет координаты $C(x_C;\ 0)$.

Точка C равноудалена от точки A и B, т. е. $AC = BC$.

Найдем: $AC^2 = (x_C - 1)^2 + (0 - 1)^2 = (x_C - 1)^2 + 1$;

$BC^2 = (x_C - 3)^2 + (0 - 5)^2 = (x_C - 3)^2 + 25$.

Получим уравнение: $(x_C - 3)^2 + 25 = (x_C - 1)^2 + 1$.

$x_C^2 = 6x_C + 9 + 25 = x_C^2 - 2x_C + 1 + 1;\ x_C = 8.$

Ответ: (8; 0).

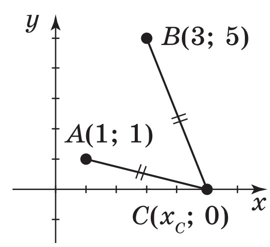


Рис. 6.22

Пример 3. Вычислить длину медианы BB_1 треугольника ABC с вершинами $A(4;\ 0)$; $B(2;\ 0)$; $C(16;\ 2)$ (рис. 6.23).

Решение:

Найдем координаты точки B_1 — середины отрезка AC (BB_1 — медиана, т. е. отрезок, который соединяет точку B с серединой стороны AC — точка B_1):

$$x_{B_1} = \frac{4+16}{2} = 10;\ \ y_{B_1} = \frac{0+2}{2} = 1.$$

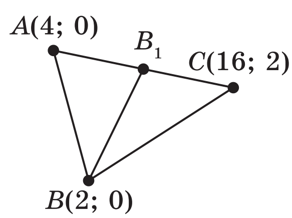


Рис. 6.23

Найдем длину медианы BB_1, т. е. расстояние между точками BB_1:

$$BB_1 = \sqrt{(10-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}.$$

Ответ: $\sqrt{65}$.

Пример 4. Доказать, что ΔABC с вершинами $A(1; -2)$; $B(4; 6)$; $C(7; -2)$ равнобедренный.

Доказательство:

Найдем длины сторон AB, AC и BC:

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73};\quad BC = \sqrt{(7-4)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73};$$

$$AC = \sqrt{(7-1)^2 + (-2+2)^2} = 6.$$

$AB = BC$, ΔABC — равнобедренный.

Пример 5. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник. Найти его площадь, если $A(4; 1)$; $B(3; 5)$; $C(-1; 4)$; $D(0; 0)$ (рис. 6.24).

Доказательство:

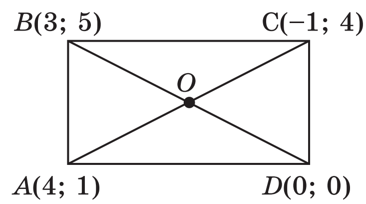


Рис. 6.24

1. Докажем, что $ABCD$ — параллелограмм, т. е. что его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

   Середина диагонали AC:

   $$x_O = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2};\quad y_O = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}.$$

   Середина диагонали BC:

   $$x_O = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2};\quad y_O = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}.$$

   Точка O — точка пересечения середин диагоналей AC и BD. $ABCD$ — параллелограмм.

2. Найдем длины диагоналей AC и BD:

$$AC = \sqrt{(4+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34};\quad BD = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}.$$

$$AC = BD.$$

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Найдем стороны прямоугольника:

$$AB = \sqrt{(4-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17};\quad BC = \sqrt{(3+1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}.$$

$$AB = BC,\ ABCD \text{ — квадрат.}$$

Площадь квадрата $ABCD$: $S = AB \cdot BC = \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 17$.

Ответ: 17 квадратных единиц.

6.2.4. Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых

Уравнение прямой в декартовых координатах (рис. 6.25) имеет вид:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

где x и y — переменные; a, b и c — некоторые числа, причем a и b одновременно не равны нулю.

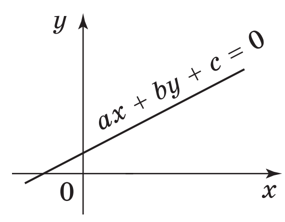
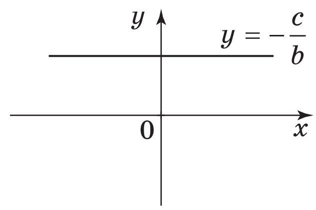
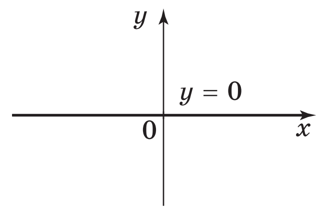
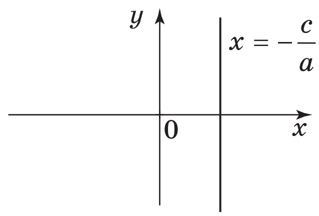
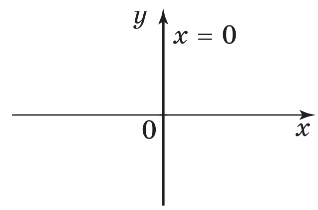
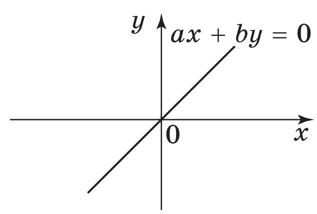


Рис. 6.25

Например, уравнение прямой может иметь вид:

$$2x - 3y + 1 = 0; \; 2x + 5 = 0; \; 5y - 4 = 0.$$

Варианты расположения прямой в системе координат

$ax + by + c = 0$; $a = 0$; $b \neq 0$	$c \neq 0$; $y = -\dfrac{c}{b}$  Прямая параллельна оси абсцисс	$c = 0$  Прямая $y = 0$ совпадает с осью абсцисс
$ax + by + c = 0$; $a \neq 0$; $b = 0$	$c \neq 0$; $x = -\dfrac{c}{a}$  Прямая параллельна оси ординат	$c = 0$  Прямая $x = 0$ совпадает с осью ординат
$ax + by + c = 0$; $a \neq 0$; $b \neq 0$	$c = 0$; $ax + by = 0$  График прямой пропорциональности	

Угловой коэффициент в уравнении прямой

Если $b \neq 0$, уравнение прямой $ax + by + c = 0$ можно представить в виде $y = kx + b$, где x и y — переменные, k и b — числа.

Число k при этом называют **угловым коэффициентом прямой.**

Угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона этой прямой к положительному направлению оси x.

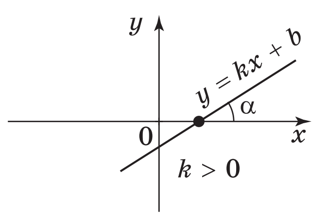


Рис. 6.26

Если $0° < \alpha < 90°$, то $k = \operatorname{tg} \alpha > 0$ (рис. 6.26);
если $90° < \alpha < 180°$, то $k = \operatorname{tg} \alpha < 0$ (рис. 6.27).

Если прямая AB проходит через точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то **угловой коэффициент** можно вычислить по формуле:

$$\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}.$$

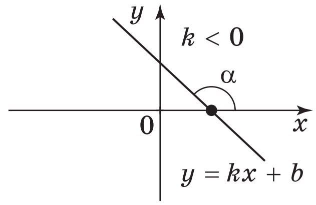


Рис. 6.27

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;\ 2)$ и $B(-2;\ 1)$.

Решение:

Очевидно, что точки A и B такие, что прямая AB не параллельна оси ординат, тогда ее уравнение имеет вид $y = kx + b$, где

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{-2-1} = \frac{1}{3}.$$

Тогда уравнение примет вид: $y = \frac{1}{3}x + b.$

Подставим в это уравнение координаты точки $A(1;\ 2)$, т. е. $x = 1,\ y = 2.$

$$2 = \frac{1}{3} + b;\ \ b = \frac{5}{3}.\ \ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}\ \text{ или }\ \frac{1}{3}x - y + \frac{5}{3} = 0;\ x - 3y + 5 = 0.$$

Ответ: $x - 3y + 5 = 0.$

Условие параллельности прямых

1. Если прямые заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то они параллельны при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (рис. 6.28).
2. Если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то они параллельны при $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.

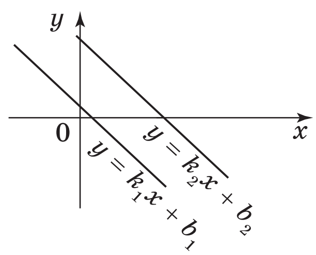


Рис. 6.28

Условие перпендикулярности прямых

1. Если прямые заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то они перпендикулярны при $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$ (рис. 6.29).
2. Если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то они перпендикулярны при $k_1 \times k_2 = -1$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

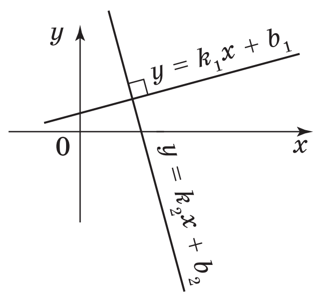


Рис. 6.29

Пример 2. Найти острый угол, который образует прямая с осью x, если прямая задана уравнением $x\sqrt{3} + y = 4$.

Решение:

Запишем уравнение в виде $y = -x\sqrt{3} + 4$. Угловой коэффициент $k = -\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, тогда $\alpha = 120°$.

Ответ: $120°$.

Пример 3. При каком значении a прямые $ax + 3y - 4 = 0$ и $2x + 6y + 1 = 0$ перпендикулярны?

Решение:

Прямые перпендикулярны, если $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$, т. е. $a \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 0$; $a = -1$.

Ответ: -1.

Пример 4. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $(3; -2)$ и перпендикулярна прямой $y = 3x + 5$.

Решение:

Прямая $y = 3x + 5$ имеет угловой коэффициент $k_1 = 3$, условие перпендикулярности: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{1}{3}$. То есть искомая прямая имеет вид: $y = -\dfrac{1}{3}x + b$.

Эта прямая проходит через точку $(3; -2)$. Подставим в уравнение $x = 3$, $y = -2$.

$$-2 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b;\ \ b = -1.\ \ y = -\frac{1}{3}x - 1.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}x - 1$.

Расстояние и углы между прямыми

Расстояние между параллельными прямыми

Если параллельные прямые заданы уравнениями $ax + by = c_1$ и $ax + by = c_2$ (рис. 6.30), то **расстояние между прямыми** вычисляется по формуле:

$$\boxed{d = \frac{|a - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

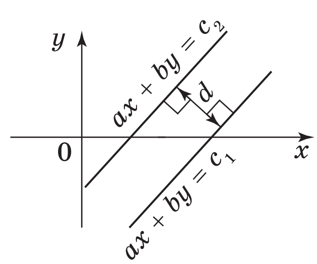


Рис. 6.30

Пример 5. Найти расстояние между прямыми $3x - 4y = 5$ и $3x - 4y = 1$.

Решение:

Расстояние между прямыми: $d = \dfrac{|5 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

Угол между прямыми

Если прямые заданы уравнениями $y = k_1c + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ и $k_1 \neq k_2$ (рис. 6.31), то угол между прямыми вычисляется по формуле:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|}$$

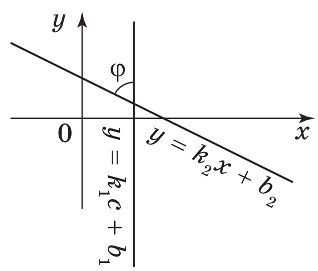


Рис. 6.31

Пример 6. Найти угол между прямыми $y = -2x - 1$ и $y = 3x + 5$.

Решение:

$k_1 = -2$ и $k_2 = 3$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{-2 - 3}{1 + (-2) \cdot 3}\right| = \left|\frac{-5}{-5}\right| = 1.$$

$$tg\ \varphi = 1,\ \varphi = 45°.$$

Ответ: 45°.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $A(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$ (рис. 6.32), вычисляется по формуле:

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

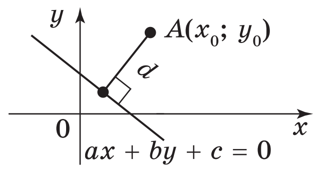


Рис. 6.32

Пример 7. Найти расстояние от точки $A(-6; 8)$ до прямой $4x + 3y - 1 = 0$.

Решение:

$$x_0 = -6;\ y_0 = 8.\ a = 4;\ b = 3.\ d = \frac{|4 \cdot (-6) + 3 \cdot 8 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-1|}{5} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

6.2.5. Уравнение окружности

Уравнением фигуры $\Phi(x; y) = 0$ в декартовых координатах на плоскости (рис. 6.33) называется уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. Любая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению, принадлежит данной фигуре.

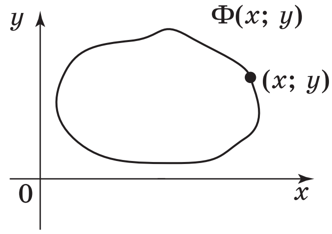


Рис. 6.33

Уравнение окружности с центром в точке $O_1(a; b)$ и радиусом R (рис. 6.34) имеет вид:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

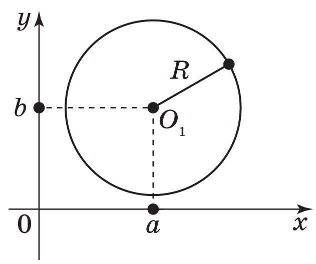


Рис. 6.34

Например, уравнение окружности с центром $(-3; 4)$ и радиусом $R = 3$ имеет вид:

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

Обратно: если дано уравнение окружности $(x - 5)^2 + y^2 = 3$, то центр этой окружности находится в точке $A(5; 0)$, $R = \sqrt{3}$.

Если **центр окружности совпадает с началом координат** (рис. 6.35), то уравнение имеет вид:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

Например, уравнение окружности $x^2 + y^2 = 16$ — это уравнение окружности с центром $(0; 0)$; $R = 4$.

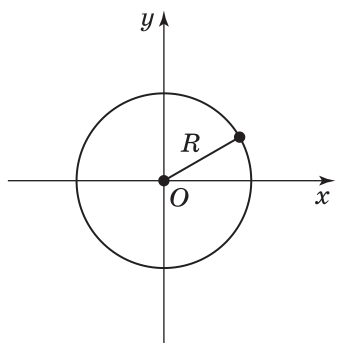


Рис. 6.35

Пример 1. Найти центр и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.

Решение:

Представим уравнение в виде (выделим полный квадрат относительно x и относительно y):

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 1 = 0.$$

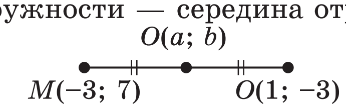
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Окружность имеет центр $(-1; 2)$ и радиус $R = 1$.

Пример 2. Записать уравнение окружности с диаметром MN, если $M(-3;\ 7)$; $N(1;\ -3)$.

Решение:

Центр окружности — середина отрезка MN:



$$a = \frac{-3+1}{2} = -1; \quad b = \frac{7-3}{2} = 2.$$

Радиус — длина отрезка MO или OM:

$$MO = \sqrt{(-3-1)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}.$$

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 41.$$

Пример 3. Записать уравнение окружности, проходящей через точки $A(-3;\ 0)$ и $B(0;\ 9)$, если известно, что центр окружности лежит на оси ординат (рис. 6.36).

Решение:

Если центр окружности лежит на оси ординат, то уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Подставим в это уравнение координаты точек A и B, получим систему уравнений с неизвестными b и R:

$$\begin{matrix} A\colon x=-3;\ y=0; \\ B\colon x=0;\ y=9; \end{matrix} \quad \begin{cases} (-3)^2 + (0-b)^2 = R^2, \\ 0^2 + (9-b)^2 = R^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9^2 + b^2 = R^2, \\ (9-b)^2 = R^2; \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 9^2 + b^2 = R^2, \\ 81 - 18b + b^2 = R^2, \end{cases}$$

$$-72 + 18b = 0;\ b = 4;\ R^2 = 9 + 16;\ R = 5.$$

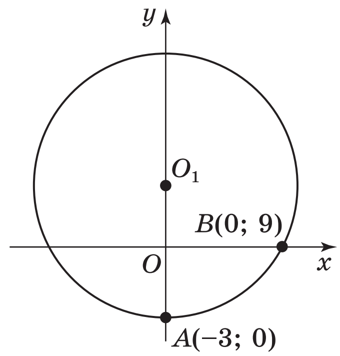


Рис. 6.36

Уравнение окружности имеет вид: $x^2 + (y-4)^2 = 25$.

Пример 4. На окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 169$, найти точки: а) с абсциссой -5; б) с ординатой 13.

Решение:

а) Абсцисса равна -5, т. е. $x = -5$.
$(-5)^2 + y^2 = 169$; $y^2 = 169 - 25$; $y^2 = 144$; $y = \pm 12$. Это точки $(-5;\ 12)$ и $(-5;\ -12)$.

б) Ордината $y = 13$. $x^2 + 13^2 = 169$; $x^2 = 0$; $x = 0$. Это точка $(0;\ 13)$.

Пересечение прямой с окружностью

Пусть дана окружность радиуса R и прямая m, расстояние от которой до центра окружности равно d.

Введем систему координат xOy так, что центр окружности совпадет с началом координат, а ось x расположим перпендикулярно прямой m.

Уравнение окружности имеет вид:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

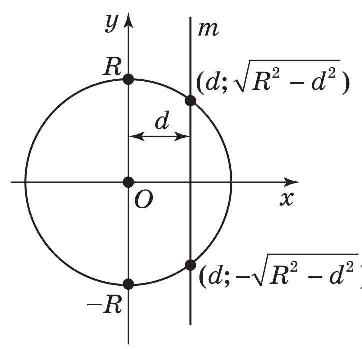


Рис. 6.37

Возможные случаи:

1. $\boldsymbol{R > d}$. Система имеет два решения (прямая пересекает окружность в двух точках) (рис. 6.37).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x = d. \end{cases}$$

Решение: $\left(d; \sqrt{R^2 - d^2}\right)$ и $\left(d; -\sqrt{R^2 - d^2}\right)$.

2. $\boldsymbol{R = d}$ (рис. 6.38).

Система $\begin{cases} x^2 + y^2 = R, \\ x = d \end{cases}$ имеет одно решение (окружность и прямая имеют одну общую точку, прямая касается окружности).

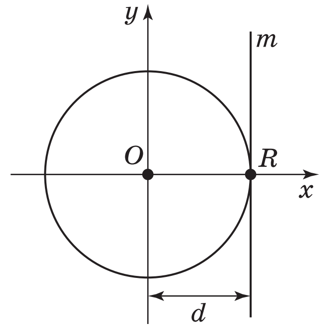


Рис. 6.38

3. $\boldsymbol{R < d}$ (рис. 6.39).

Система $\begin{cases} x^2 + y^2 = R, \\ x = d \end{cases}$ решений не имеет, прямая и окружность не имеют общих точек.

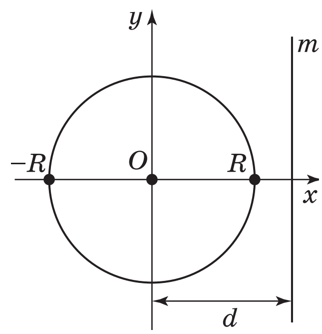


Рис. 6.39

Пример 5. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 25$ и прямой $x + y - 1 = 0$.

Решение:

Решим систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$

Из второго уравнения $y = 1 - x$. Подставим значение y в первое уравнение:
$x^2 + (1 - x)^2 = 25$; $x^2 + 1 - 2x + x^2 = 25$; $x^2 - x - 12 = 0$; $x_1 = -3$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = -3$.
Ответ: $(-3; 4)$ и $(4; -3)$.

Метод координат

Метод координат является универсальным методом для решения большинства геометрических задач. Главное условие — удачный выбор системы координат и направления осей.

Алгоритм решения задач методом координат:

1. Ввести на плоскости систему прямоугольных координат.
2. По возможности систему координат связать с взаимно перпендикулярными прямыми, данными в задаче, так, чтобы одна или две такие прямые совпадали с системой координат.
3. Переформулировать задачу языком координат.
4. Преобразовать алгебраические выражения в координатные (или векторные) согласно условиям задачи.
5. Найти или доказать то, что требуется в задаче, используя полученные результаты.

Обычно в качестве осей координат выбираются прямые, фигурирующие в условии задачи, а также оси симметрии.

Пример 6. В круге с центром O проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. На радиусе OB взята точка K так, что $OK = \frac{1}{3}OB$, а на радиусе OD — точка M так, что $OM = \frac{1}{2}OD$. Доказать, что точка пересечения прямых CK и AM расположена на данной окружности.

Доказательство:

Пусть дана окружность с диаметрами $AB \perp CD$.

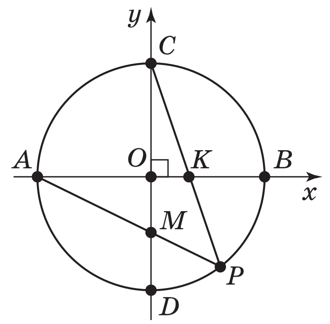


Рис. 6.40

Расположим систему координат так, что центр окружности совпадает с началом координат, диаметр AB лежит на оси абсцисс, а диаметр CD — на оси ординат (рис. 6.40).

Пусть радиус окружности равен 1. Тогда координаты точки на окружности и внутри нее: $A(-1;\ 0)$; $B(1;\ 0)$; $C(0;\ 1)$; $D(0;\ -1)$; $K\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$; $M\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Составим уравнения прямых, проходящих через точки:

***C* и *K*, $y = kx + b$**	***A* и *M*, $y = kx + b$**
Подставим координаты точек в уравнение $y = kx + b$:	
$C(0;\ 1)$: $K\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$: $\begin{cases} b = 1, \\ \frac{1}{3}k + b = 0; \end{cases}$ $b = 1,\ k = -3.$ $y = -3x + 1.$	$A(-1;\ 0)$: $-k + b = 0;$ $M\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$: $b = -\frac{1}{2},\ k = -\frac{1}{2}.$ $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$

Найдем точку пересечения прямых $y = -3x + 1$ и $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$:

$$-3x + 1 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2};\quad x = \frac{3}{5};\quad y = -\frac{4}{5}.$$

Точка пересечения $P\left(\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$. Подставим эти значения в уравнение окружности с единичным радиусом: $x^2 + y^2 = 1$: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1.$

Координаты удовлетворяют уравнению окружности. Точка P лежит на окружности, что и требовалось доказать.

6.2.6. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и их систем

Уравнение с двумя переменными x и y имеет вид $\Phi(x;\ y) = 0$.

Решением такого уравнения является множество упорядоченных пар $(x;\ y)$, которые обращают уравнение в верное равенство.

Если изобразить это множество решений на координатной плоскости, получится **график уравнения с двумя переменными**.

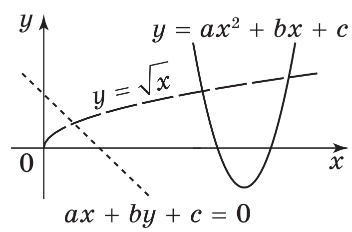


Рис. 6.41

Так, графиком уравнения $ax + by + c = 0$ является **прямая**, если хотя бы один из коэффициентов a или b не равен нулю (рис. 6.41).

Графиком уравнения $y = ax^2 + bx + c$ является **парабола**, а графиком $y = \sqrt{x}$ — **ветвь параболы**, расположенная в I координатной четверти (рис. 6.41).

Графиком уравнения $xy = k$ является **гипербола** (рис. 6.42, 6.43).

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ является **окружность** с центром в начале координат и радиусом r, графиком уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ — **окружность** с центром $(a; b)$ и радиусом R (рис. 6.44).

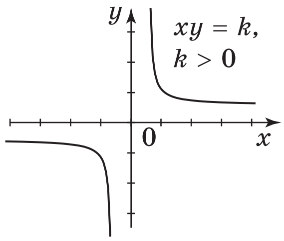


Рис. 6.42

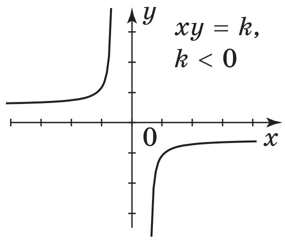


Рис. 6.43

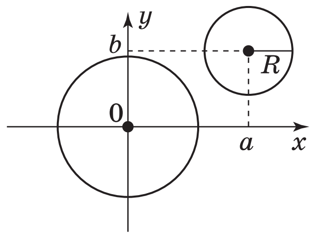


Рис. 6.44

Пример 1. Какие из пар (5; 4), (1; 0) и $\left(-1; -\dfrac{2}{7}\right)$ являются решениями уравнения?

а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $x^3 - 1 = x^2y + 6y$.

Решение:

а) Подставив каждую из заданных пар чисел в уравнения, убеждаемся, что решением первого уравнения $x^2 + y^2 = 1$ является пара (1; 0), т. к. $1^2 + 0^2 = 1$.

б) Решениями второго уравнения являются все три пары:

$$125 - 1 = 25 \cdot 4 + 6 \cdot 4;\ 124 = 124;$$
$$1^3 - 1 = 1 \cdot 0 + 6 \cdot 0;\ 0 = 0;$$
$$-1 - 1 = -\frac{2}{7} - \frac{12}{7};\ -2 = -2.$$

Ответ: а) (1; 0); б) (5; 4); (1; 0) и $\left(-1; -\dfrac{2}{7}\right)$.

Пример 2. Определить степень уравнения:

а) $2x^2 + 3y^3 + 4 = 0$; б) $(3x^2 + x)(4x - y^2) = x$; в) $5y^2 - x^2y^3 + xy - 1 = 0$.

Решение:

Степень уравнения определяется по степени старшего одночлена, входящего в уравнение.

а) Уравнение третьей степени.

б) Уравнение четвертой степени, т. к. одночлен с наибольшей суммарной степенью — $3x^2y^2$.

в) Уравнение пятой степени (x^2y^3 имеет степень 5).

Пример 3. Какая фигура задается графиком уравнения?

а) $2x + 3y - 7 = 0$;

б) $6x^2 - 5x = y - 1$;

в) $2(x + 1) = x^2 - y$;

г) $xy - 1{,}2 = 0$;

д) $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Решение:

а) Прямая.

б) Представим в виде $y = 6x^2 - 5x + 1$. Парабола.

в) Представим в виде $2x + 2 = x^2 - y$; $y = x^2 - 2x - 2$. Парабола.

г) $xy = 1{,}2$ или $y = \dfrac{1{,}2}{x}$. Гипербола.

д) $x^2 + y^2 = 9$. Окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 3$.

Системы уравнений с двумя переменными

Чтобы **решить систему уравнений с двумя переменными**, используя графики этих уравнений, нужно:

1. Построить графики уравнений в одной координатной плоскости.
2. Найти координаты точек пересечения графиков или убедиться в том, что они не пересекаются.
3. Если координаты точки пересечения — целые числа, сделать проверку, если нет, определить приближенно, могут ли полученные числа являться решениями.
4. Записать ответ.

Пример 4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = -4. \end{cases}$

Решение:

Построим в одной системе координат прямую $x - y = 5$ или $y = x - 5$ и гиперболу $y = -\dfrac{4}{x}$ (рис. 6.45)

Точки пересечения: (1; −4) и (4; −1).

Проверка: $x = 1$; $y = -4$: $\begin{cases} 1 - (-4) = 5, \\ 1 \cdot (-4) = -4; \end{cases}$ верно;

$x = 4$; $y = -1$: $\begin{cases} 4 - (-1) = 5, \\ 4 \cdot (-1) = -4; \end{cases}$ верно.

Ответ: (4; −1) и (1; −4).

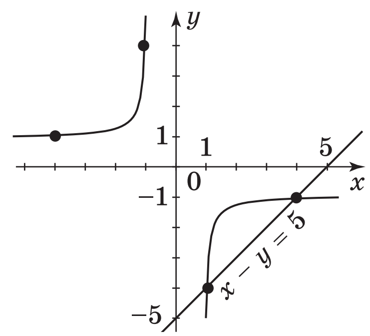


Рис. 6.45

Пример 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

Решение:

Строим окружность $x^2 + y^2 = 25$, т. е. окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 5$ (рис. 6.46). $xy = -12$ или $y = -\dfrac{12}{x}$ — гипербола, расположенная во II и IV координатных четвертях.

Имеем четыре точки пересечения.

Ответ: (−3; 4); (3; −4); (4; −3); (−4; 3).

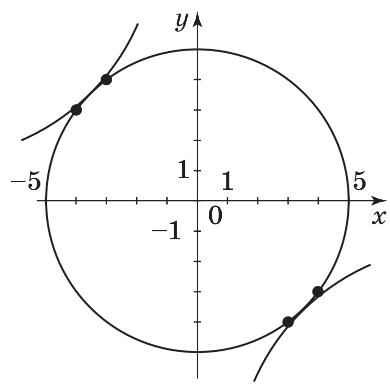


Рис. 6.46

Пример 6. Указать количество решений системы уравнений с двумя переменными в зависимости от параметра a: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - |x| = a. \end{cases}$

Решение:

$x^2 + y^2 = 4$ — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 2$.

$y - |x| = a$ или $y = |x| + a$ — это зависимость $y = |x|$ со сдвижкой на a единиц вдоль оси y:

1. Если $a = 2$, то окружность $x^2 + y^2 = 4$ и $y = |x| + a$ имеют одну общую точку, т. е. одно решение (рис. 6.48, случай 1).
2. Если $a = -2$, то получаем три общие точки, т. е. три решения (рис. 6.48, случай 2).

3. При $-2 < a < 2$ — два решения, и сюда же подходит случай, когда $y = |x| + a$ касается окружности в двух точках.
Найдем это значение a.
Имеем прямоугольный треугольник с катетами a и гипотенузой 4 (рис. 6.47). Тогда по теореме Пифагора: $a^2 + a^2 = 16$; $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $-a = -2\sqrt{2}$.

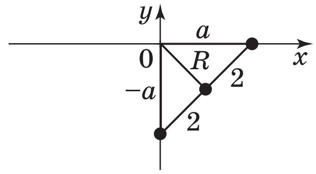
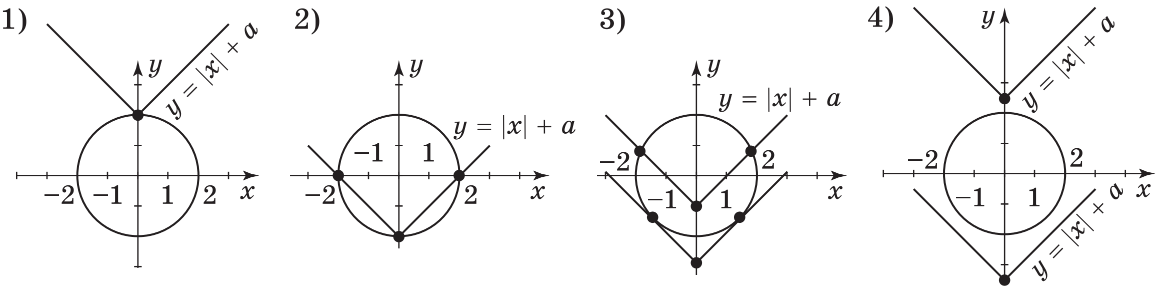


Рис. 6.47

Тогда при $a = -2\sqrt{2}$ имеем две общие точки (рис. 6.48, случай 3).

4. Если $a > 2$ или $a < -2$ $\left(a \neq -2\sqrt{2}\right)$, общий точек нет (рис. 6.48, случай 4).



$a = 2$; 1 решение $a = -2$; 3 решения 2 решения решений нет

Рис. 6.48

Ответ: а) решений нет при $a \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2\sqrt{2}; -2\right) \cup (2; +\infty)$; б) одно решение при $a = 2$; в) два решения при $-2 < a < 2$ и $a = -2\sqrt{2}$; г) три решения при $a = -2$.

6.2.7. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными и их систем

Неравенством с двумя переменными *x* и *y* называется неравенство вида:

$$\Phi(x; y) \geq 0 \text{ или } \Phi(x; y) \leq 0$$

Решением неравенства с двумя переменными называется пара переменных $(x; y)$, которая обращает это неравенство в верное равенство.

Если каждое решение неравенства с двумя переменными отобразить точкой на координатной плоскости, то получится график этого неравенства, который является некоторой фигурой. Говорят, что эта фигура задается или описывается неравенством.

Решение линейных неравенств с двумя переменными

Линейным неравенством с двумя переменными называется неравенство вида:

$$ax + by < c \text{ или } ax + by > c,$$

где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа.

Если в линейном неравенстве знак неравенства заменить на знак равенства, то получится линейное уравнение $ax + by = c$.

Если $a \neq 0$ или $b \neq 0$, то графиком является прямая (рис. 6.49).

Она разбивает множество не принадлежащих ей точек координатной плоскости на две области, представляющие собой **открытые полуплоскости**.

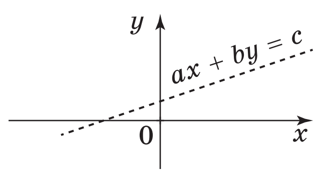


Рис. 6.49

Одна из них является графиком неравенства $ax + by < c$, другая — графиком неравенства $ax + by > c$.

Пунктир показывает, что точки изображаемой ею прямой не принадлежат графику неравенства.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то прямая $y = \frac{c}{b}$ разбивает плоскость на верхнюю и нижнюю открытые полуплоскости (рис. 6.50, *а*).

Если $a \neq 0$, $b = 0$, то прямая разбивает плоскость на левую и правую полуплоскости (рис. 6.50, *б*).

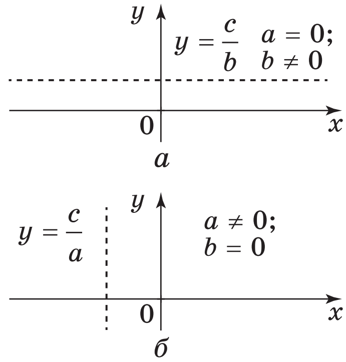


Рис. 6.50

Если $a = 0$ и $b = 0$, то:

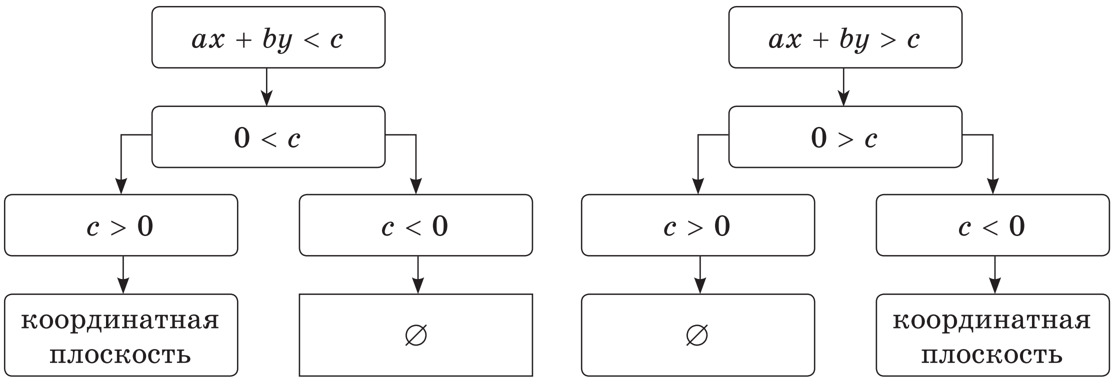


График неравенства $y > f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, которые находятся **выше точек графика** $y = f(x)$, а график $y < f(x)$ — из всех точек координатной плоскости, которые находятся **ниже точек графика** $y = f(x)$.

Пример 1. Показать решение неравенства $2x + 3y < 6$.

Решение:

Построим прямую (рис. 6.51):

x	3	0
y	0	2

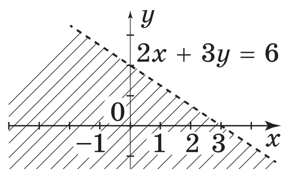


Рис. 6.51

Выясним, верхняя или нижняя полуплоскость является решением неравенства.

Возьмем точку (0; 0). $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 6$; $0 < 6$, верно.

Точка (0; 0) принадлежит множеству решений неравенства $2x + 3y < 6$, значит, **нижняя полуплоскость** относительно прямой $2x + 3y = 6$ будет являться решением неравенства $2x + 3y < 6$.

Пример 2. Какое множество точек описывается неравенством

$$\frac{1}{2}(2x+3y) > \frac{1}{3}(3x+4y)+1?$$

Решение:

Упростим неравенство $x + \frac{3}{2}y > x + \frac{4}{3}y + 1$; $\frac{1}{6}x > 1$ или $y > 6$.

Верхняя полуплоскость относительно прямой $y = 6$ является множеством точек, которое отмечается неравенством (рис. 6.52).

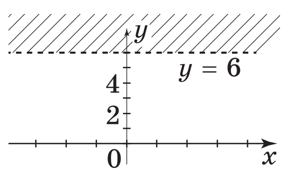


Рис. 6.52

Пример 3. Построить график неравенства $y \leq 3x + 5$.

Решение:

Построим прямую $y = 3x + 5$ (рис. 6.53):

x	0	–1
y	5	2

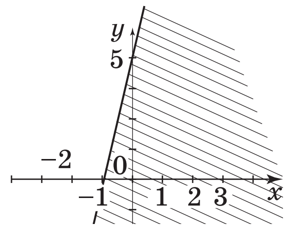


Рис. 6.53

Прямую проводим сплошной линией. Это означает, что все точки прямой также являются решениями неравенства.

Подставим в неравенство значения $x = 0$ и $y = 0$, т. е. начало координат:

$$0 \leq 3 \cdot 0 + 5, \text{ т. е. } 0 \leq 5, \text{ верно.}$$

Значит, графиком данного неравенства будут все точки плоскости, находящиеся ниже прямой $y = 3x + 4$, включая точки, принадлежащие прямой.

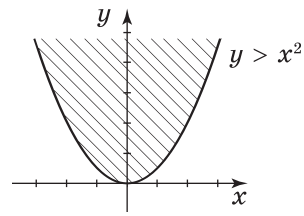


Рис. 6.54

Решение нелинейных неравенств с двумя переменными

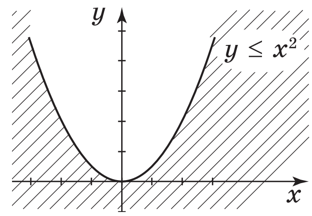


Рис. 6.55

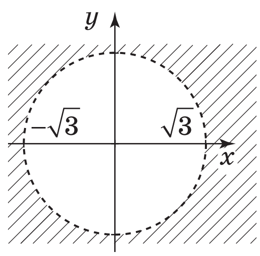
Пример 4. Построить график неравенства:
а) $y > x^2$; б) $y \leq x^2$.

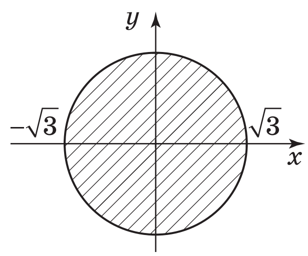
Решением неравенства $y > x^2$ являются все точки плоскости, лежащие выше графика $y = x^2$. Точки параболы в решение не входят (рис. 6.54).

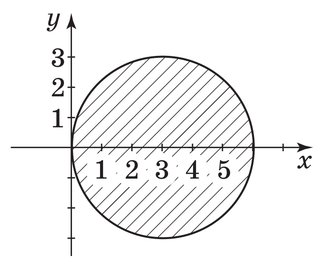
Графиком неравенства (решением неравенства) $y \leq x^2$ являются все точки плоскости, лежащие ниже параболы $y = x^2$, включая точки, принадлежащие самой параболе (рис. 6.55).

Пример 5. Показать множество решений неравенств:

а) $x^2 + y^2 \geq 3$; б) $x^2 + y^2 < 3$; в) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 9$.







Графиком неравенства $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ являются все точки координатной плоскости, лежащие внутри окружности, а графиком неравенства $(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$ — точки плоскости вне окружности.

Пример 6. Решить неравенство:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 25) \leq 0.$$

Решение:

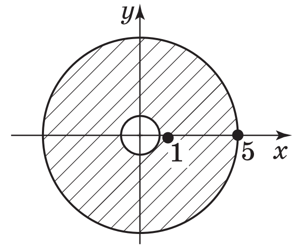


Рис. 6.56

Поскольку произведение равно нулю лишь в том случае, когда хотя бы один из множителей равен нулю, уравнение $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 25)$ задает линию, распадающуюся на две окружности: $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 25$ (рис. 6.56). Они делят плоскость на три части. С помощью метода пробных точек (т. е. берем некоторые точки в каждой из областей, подставляем их координаты в неравенство и проверяем, являются ли они верными) устанавливаем, что неравенство выполняется в кольце (рис. 6.56).

Решение систем неравенств с двумя переменными

Для решения систем неравенств: $\begin{cases} F(x;\, y) \ge 0, \\ Q(x;\, y) \ge 0 \end{cases}$ находим сначала множество точек X_1 — точек плоскости, на котором выполняется первое неравенство, затем множество X_2 — точек плоскости, на котором выполняется второе неравенство. Решением системы будет пересечение множеств X_1 и X_2.

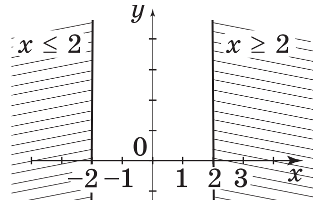


Рис. 6.57

Пример 7. Изобразить на плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 4 \ge 0, \\ y^2 - 4y + 3 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4 \le 0, \\ y^2 - 4y + 3 \le 0. \end{cases}$

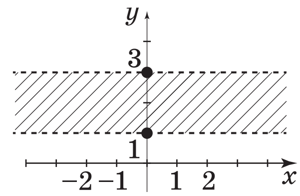


Рис. 6.58

Решение:

а) Неравенство $x^2 - 4 \ge 0$ равносильно совокупности неравенств $x \ge 2$ и $x \le -2$. Каждое из них задает на плоскости xOy замкнутую полуплоскость. Решением неравенства $x^2 - 4 \ge 0$ является объединение этих полуплоскостей (рис. 6.57).

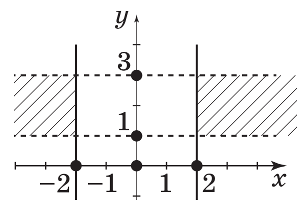


Рис. 6.59

Неравенство $y^2 - 4y + 3 < 0$ равносильно двойному неравенству $1 < y < 3$ или системе неравенств: $\begin{cases} y > 1, \\ y < 3. \end{cases}$

Множеством решений этой системы на плоскости xOy является пересечение открытых полуплоскостей $y > 1$ и $y < 3$, т. е. открытая полоса $1 < y < 3$ (рис. 6.58).

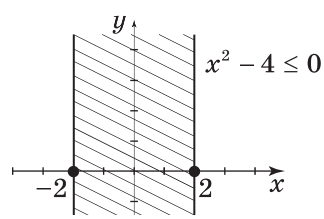


Рис. 6.60

Решением системы:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \ge 0, \\ y^2 - 4y + 3 < 0 \end{cases}$$

является пересечение уже полученных областей. Это две полуполосы, открытые сверху и снизу и замкнутые на торцах (рис. 6.59).

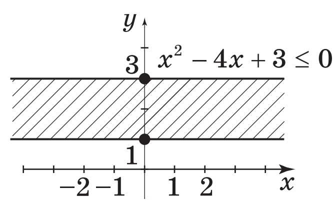


Рис. 6.61

б) Учитывая предыдущие рисунки, получаем, что оба неравенства системы задают на плоскости замкнутые полосы (рис. 6.60, 6,61).

Пересечением таких полос, очевидно, будет являться замкнутый прямоугольник (рис. 6.62).

$$\begin{cases} x^2 - 4 \le 0, \\ y^2 - 4y + 3 \le 0. \end{cases}$$

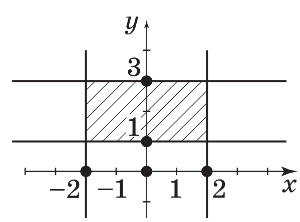


Рис. 6.62

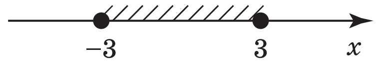
Тренировочные тестовые задания к разделу 6

1. Определите координату точки A.

1) -279 2) -274 3) -260 4) -256

2. На каком рисунке верно изображено решение неравенства $|x - 1| \geq 3$?

1) 

3) 

2) 

4) 

3. Точка B, симметричная точке $A(-3; 4)$ относительно оси ординат, имеет координаты:

1) $B(3; 4)$ 2) $B(-3; -4)$ 3) $B(3; -4)$ 4) $B(-3; 4)$

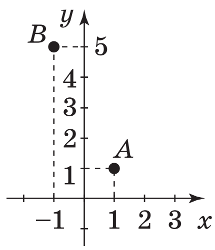
4. Найдите радиус окружности, диаметр которой MN, если $M(5; 4)$, $N(1; 7)$.

1) 1 2) 1,5 3) 2,5 4) 5

5. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $A(-1; -1)$, $B(-1; 4)$, $C(6; 4)$, $D(6; -1)$.

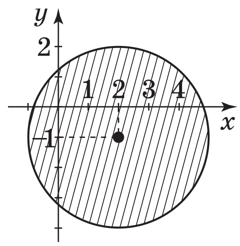
1) 24 2) 30 3) 35 4) 48

6. Через точки A и B, изображенные на рисунке, проходит прямая:



1) $2x - y + 3 = 0$ 2) $2x + y - 3 = 0$ 3) $2x - y - 3 = 0$ 4) $2x + y + 3 = 0$

7. На рисунке изображено множество решений неравенства:



1) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 9$
2) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 9$
3) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 3$
4) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 9$

8. Расстояние от точки $A(-2; 3)$ до начала координат равно:

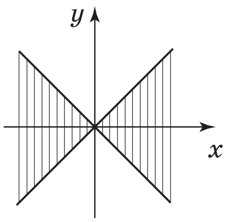
1) 5 2) $\sqrt{5}$ 3) $\sqrt{13}$ 4) $\sqrt{15}$

9. Найдите центр окружности на оси ординат, если известно, что окружность проходит через точку $A(3; 6)$ и радиус окружности равен 5.

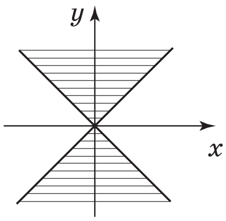
1) (0; 10)
2) (0; 2)
3) (0; 10) или (0; 2)
4) (0; –10) или (0; –2)

10. На каком из рисунков изображено множество решений неравенства $|y| \le |x|$?

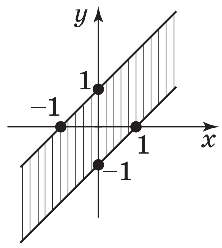
1)



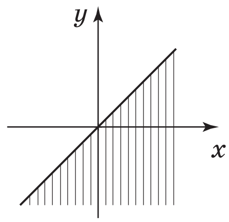
2)



3)



4)



11. Найдите координаты середины отрезка MN, если $M(-1;\ 7)$, $N(0;\ -1)$.
Ответ: ____________________.

12. Запишите ординату центра окружности, заданной уравнением $(x - 1)^2 + y^2 = 3$.
Ответ: ____________________.

13. Найдите радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$.
Ответ: ____________________.

14. Найдите угол наклона к положительной оси x прямой, заданной уравнением $x + y - 3 = 0$.
Ответ: ____________________.

15. В параллелограмме $ABCD$ заданы координаты трех его вершин: $A(-3;\ 0)$; $C(4;\ 1)$ и $D(0;\ -3)$. Найдите координаты четвертой вершины B.
Ответ: ____________________.

16. Найдите длины диагоналей AC и BD в предыдущей задаче.
Ответ: ____________________.

17. Сколько решений имеет система уравнений с двумя переменными $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y - |x| + 3 = 0? \end{cases}$
Ответ: ____________________.

18. Прямая задана уравнением $y = kx + b$. Найдите значение b при условии, что данная прямая перпендикулярна прямой $y = \dfrac{x}{2} + 4$ и проходит через точку $M(-1;\ -5)$.
Ответ: ____________________.

19. С помощью графиков установите, при каком значении a система

$$\begin{cases} y = |x^2 - 2x - 8|, \\ y = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.
Ответ: ____________________.

7. Геометрия

Знать:
- основные понятия в геометрии: прямая, точка, плоскость;
- определение: угол, отрезок, луч;
- треугольник, его виды;
- четырехугольник, его виды;
- многоугольник, окружность, круг, их взаимное расположение;
- понятия об измерении величин: длина, площадь, градусная мера;
- понятие вектора и действий над ним;
- понятие о способах преобразований плоскости;
- основные тригонометрические соотношения.

Уметь:
- распознавать на чертежах, изображать самостоятельно основные геометрические фигуры;
- решать задачи на вычисление, доказательство и построение геометрических фигур и их элементов, используя изученные определения, аксиомы, теоремы;
- выполнять все действия с векторами;
- проводить измерения геометрических величин: находить площадь, длину, градусную меру заданной геометрической фигуры;
- выделять в задаче условие, заключение, проводить доказательные рассуждения, сопоставлять результат с условием задачи.

7.1. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин

7.1.1. Начальные понятия геометрии

Точка, прямая, плоскость

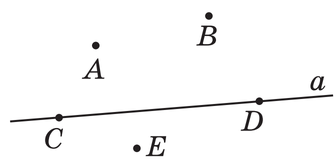


Рис. 7.1

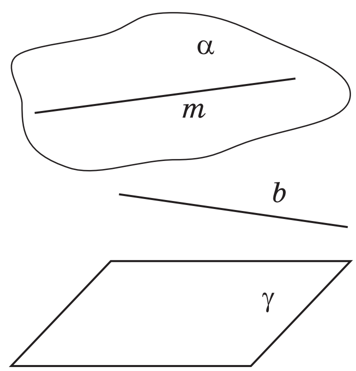


Рис. 7.2

Любая геометрическая фигура имеет четкое **определение** — описание характеристического свойства фигуры.

Не имеют определения **основные фигуры геометрии**:
- точка;
- прямая;
- плоскость.

Точки принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, D, E и т. д.

Прямые обозначают строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, m и т. д., а плоскости — строчными буквами греческого алфавита: α, β, γ и т. д.

Прямая бесконечна. Плоскость бесконечна.

Точки могут принадлежать прямой, а могут ей не принадлежать. На рис. 7.1 точки C и D принадлежат прямой a, пишут: $C \in a$, $D \in a$ (читают: «Точка C принадлежит прямой a»). Точки A, B и E не принадлежат прямой a, пишут: $A \notin a$ ($\notin$ — не принадлежит).

Прямая может принадлежать плоскости или ей не принадлежать. Прямая m на рис. 7.2 принадлежит плоскости α (пишут: $m \subset \alpha$, $\subset$ — знак принадлежности для множества точек). Прямая b не принадлежит плоскости γ: $b \not\subset \gamma$.

Если точка принадлежит двум прямым одновременно, т. е. если прямые имеют **одну** общую точку, то они пересекаются.

Точка M — точка пересечения прямых a и b (рис. 7.3).

Через две точки можно провести прямую, и только одну.

Поэтому иногда прямые обозначают двумя прописными буквами, например AB, прямая MN и т. д.

Рис. 7.3

Взаимное расположение прямых на плоскости:

1. Если прямые имеют одну общую точку, то они **пересекаются** в этой точке и называются **пересекающимися** (рис. 7.3).
2. Если прямые не имеют общих точек, они называются **параллельными** (рис. 7.4). Пишут: $a \parallel b$.
3. Если прямые имеют две (и более) общие точки, они **совпадают** (рис. 7.5).

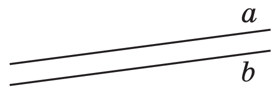


Рис. 7.4

Рис. 7.5

Отрезок. Полупрямая (луч). Полуплоскость

Отрезок — это часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя ее точками. Эти точки называют **концами отрезка** (рис. 7.6).

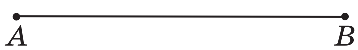


Рис. 7.6

Отрезок обозначается указанием его концов, например отрезок AB.

Очевидно, что отрезок является **частью некоторой прямой.**

Расположение точек на прямой:

1. Точка C лежит между точками A и B (рис. 7.7).
2. Точки A и C лежат по одну сторону от точки B, аналогично точки C и B лежат по одну сторону от точки A.
3. Точки A, B и C лежат на прямой l и задают отрезки AC, BC и AB.

Рис. 7.7

Для измерения отрезков служат различные инструменты. Простейший из них — **линейка с делениями.**

Длина отрезка — это **расстояние между его конечными точками.**

Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые его разбивает каждая его точка.

Например, $MN = MP + PN$ (рис. 7.8).

Длина отрезка — величина положительная.

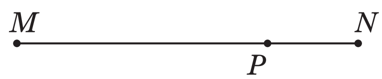


Рис. 7.8

Полупрямая (луч) — это часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной точки. Эта точка называется **началом полупрямой** (или **луча**), или **начальной точкой.**

Полупрямые обозначают двумя прописными буквами, например PA, где первая буква — это начало полупрямой (луча) (рис. 7.9).

Иногда полупрямые (лучи) обозначают так же, как и прямые, т. е. строчными буквами: a, b, k и т. д.

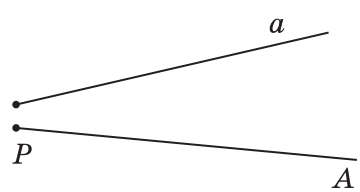


Рис. 7.9

Полупрямые одной и той же прямой, имеющие общую начальную точку, называются **дополнительными**, например лучи KA и KB (рис. 7.10).

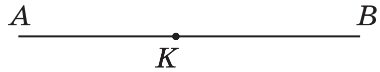


Рис. 7.10

Аналогично тому, что точка разбивает прямую на две дополнительные полупрямые, прямая разбивает плоскость на **две полуплоскости**.

Разбиение плоскости обладает следующим **свойством:** если концы отрезка лежат в одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую, а если в разных — отрезок пересекает прямую. На рис. 7.11 отрезок AB пересекает прямую m, отрезок PK не пересекает (рис. 7.11).

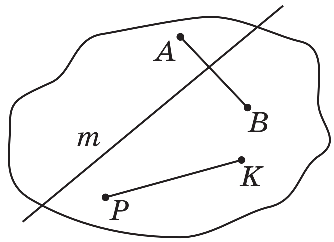


Рис. 7.11

Угол. Треугольник

Угол — фигура, состоящая из точки — **вершины угла**, и двух различных лучей, выходящих из этой точки, — **сторон угла**.

Способы обозначения угла:

1. $\angle P$ (обозначается только вершина) (рис. 7.12).
2. $\angle ABC$ (обозначаются стороны и вершина. Название точки, обозначающей вершину, ставят посередине) (рис. 7.13).
3. $\angle(mn)$ (обозначают лучи, выходящие из одной точки) (рис. 7.14).

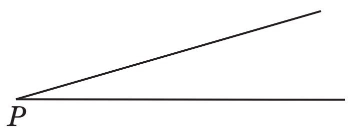


Рис. 7.12

Рис. 7.13

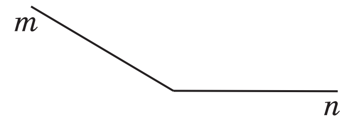


Рис. 7.14

Углы измеряют **в градусах.** Для измерения углов используют **транспортир**.

Угол, стороны которого являются дополнительными друг к другу лучами, называют **развернутым**. Его градусная мера составляет 180° (рис. 7.15).

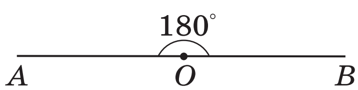


Рис. 7.15

Треугольник — это фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки (рис. 7.16).

Точки — вершины треугольника: A, B, C.

Отрезки — стороны треугольника: AB, BC и AC.

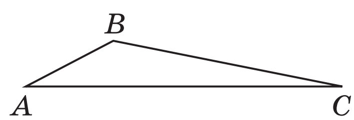


Рис. 7.16

Треугольники называются **равными,** если у них равны соответственные стороны и соответственные углы (соответственные стороны лежат против соответственных углов) (рис. 7.17).

На чертеже равные отрезки обозначают равным количеством штрихов, равные углы — равным количеством дужек.

Если $\Delta MNK = \Delta PQR$, то $MN = PQ$; $NK = QR$ и $MK = PR$; $\angle M = \angle P$, $\angle N = \angle Q$, $\angle K = \angle R$.

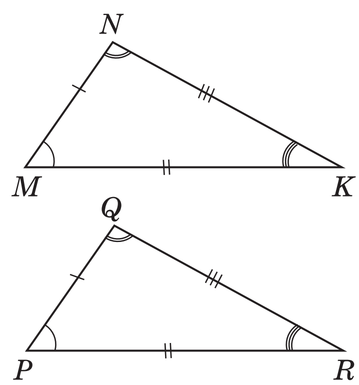


Рис. 7.17

Задача 1. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 8$ см; $BC = 10$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

Решение:

В задаче не указано, как именно расположены точки на прямой. Возможны случаи:

а) Точка B лежит между точками A и C. Тогда $AC = AB + BC = 8 + 10 = 18$ (см) (рис. 7.18).

б) Точка A лежит между B и C. Тогда $BC = AB + AC$, т. е. $AC = 10 - 8 = 2$ (см) (рис. 7.19).

в) Точка C лежит между A и B, но это невозможно, т. к. $BC > AB$ (рис. 7.20).

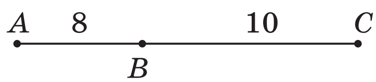


Рис. 7.18

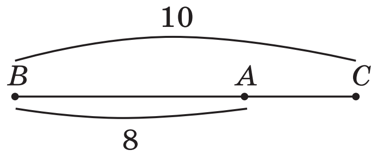


Рис. 7.19

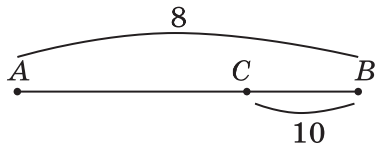


Рис. 7.20

Ответ: 18 см или 2 см.

Задача 2. Даны равные треугольники: $\Delta ABC = \Delta XOY$. Записать равные стороны и углы.

Решение:

$$AB = XO;\ BC = OY;\ AC = XY;\ \angle A = \angle X;\ \angle B = \angle O;\ \angle C = \angle Y.$$

Определения, аксиомы, теоремы

Определение включает в себя характеристические свойства геометрической фигуры.

Дать определение — это ответить на вопрос: что это такое?

Например, если говорят: «Дайте определение треугольника», это означает ответить на вопрос: что такое треугольник? Треугольник — это фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно их соединяющих.

Аксиома — это первоначальное утверждение геометрии, которое считается верным без доказательства. С помощью аксиом выводятся дальнейшие утверждения.

Из аксиом и определений выводят утверждения, которые называют **теоремами**.

Теорема — это утверждение, которое доказывается.

Правильность утверждения о свойствах геометрических фигур устанавливается путем рассуждений, которые называют **доказательством**.

Формулировка теоремы состоит из двух частей. Первая — условие теоремы. В ней говорится, что дано. Вторая — заключение теоремы. В ней говорится, что именно требуется доказать.

Например, теорему о вертикальных углах: «Вертикальные углы равны» можно переформулировать так: «Если углы вертикальные, то они равны». Условие: «углы вертикальные». Заключение: «они равны».

При **доказательстве теорем** используются только определения, аксиомы и ранее доказанные теоремы. Никакими свойствами фигур, даже если они кажутся очевидными, пользоваться нельзя, чертеж также используется только как иллюстрация.

Часто из теоремы выводятся еще несколько утверждений. Эти утверждения называют **следствиями**.

Задача 3. На прямой отмечены точки O, M и N так, что $OM = 16$ см; $ON = 7$ см. Найти расстояние между серединами отрезков OM и ON, если:

а) точка O лежит на отрезке MN; б) точка O не лежит на отрезке MN.

Решение:

а) Пусть точка O лежит на отрезке MN (рис. 7.21).

Дано: $O \in MN$; $MA = AO$; $OB = BN$. *Найти* AB.

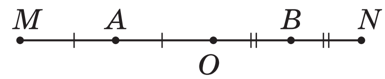


Рис. 7.21

Точка A — середина отрезка MO, тогда $AO = MA = 16 : 2 = 8$ (см).

Точка B — середина отрезка NO, тогда $OB = BN = 7 : 2 = 3{,}5$ (см).

Тогда расстояние между серединами отрезков MO и ON, т. е. $AB = AO + OB = 8 + 3{,}5 = 11{,}5$ (см).

б) Пусть точка O не лежит на отрезке MN (рис. 7.22).

Дано: $O \notin MN$; $OA = OM$; $OB = BN$. *Найти*: AB.

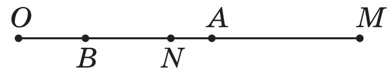


Рис. 7.22

Точка A — середина OM и $OA = AM = 8$ (см).

Точка B — середина ON и $OB = BN = 3{,}5$ (см).

Расстояние между серединами отрезков в этом случае: $AB = OA - OB = 8 - 3{,}5 = 4{,}5$ (см).

Ответ: а) 11,5 см; б) 4,5 см.

Задача 4. Угол AOB является частью угла AOC. $\angle AOC = 112°$. $\angle AOB = 3\angle BOC$. Найти $\angle AOB$.

Решение:

Пусть $\angle BOC = x$, тогда $\angle AOB = 3x$ (рис. 7.23).

Если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов (аксиома измерения углов).

То есть $\angle BOC + \angle AOB = \angle AOC$; $x + 3x = 112$; $4x = 112$; $\angle BOC = x = 28$; $\angle AOB = 3x = 84$.

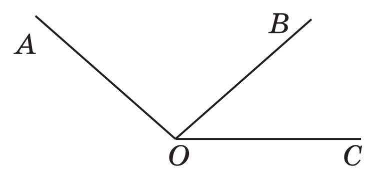


Рис. 7.23

Ответ: 84°.

7.1.2. Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла и ее свойства

Угол — геометрическая фигура, состоящая из точки (вершины) и двух лучей (сторон), выходящих из этой точки.

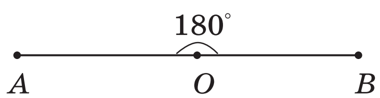
За единицу измерения угла принимают **градус** — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла.

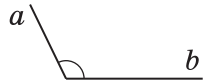
$\frac{1}{60}$ градуса называется **минутой**, обозначается «′».

$\frac{1}{60}$ минуты называется **секундой**, обозначается «″».

Например, $3°27'15''$ — три градуса, 27 минут, 15 секунд.

Виды углов

Развернутый	**Прямой**
 $\angle AOB = 180°$	 $\angle ABC = 90°$

Острый	Тупой
 $0^\circ < \angle(mn) < 90^\circ$	 $90^\circ < \angle(ab) < 180^\circ$

Смежные углы

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а другие стороны являются дополнительными лучами (рис. 7.24).

Так, $\angle(ab)$ и $\angle(bc)$ — смежные, луч c — общий. Лучи a и c — дополнительные полупрямые (рис. 7.24).

Сумма смежных углов равна 180°.

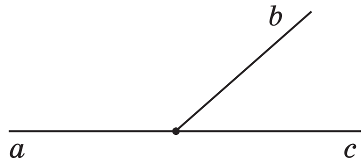


Рис. 7.24

Следствия:

1. Если два угла равны, то смежные с ними углы тоже равны.
2. Если угол не развернутый, то его градусная мера меньше 180°.
3. Угол, смежный с прямым, также прямой.

Задача 1. Найти смежные углы, если один из них на 20° больше другого (рис. 7.25).

Решение:

$$\left.\begin{aligned}\angle(mk) &= x\\ \angle(nk) &= x + 20\end{aligned}\right\}\ \angle(mk) + \angle(nk) = 180^\circ$$

(по теореме о смежных углах).

$$x + x + 20^\circ = 180^\circ;\ 2x = 160^\circ;\ x = 80^\circ;$$

$$x + 20^\circ = 100^\circ.\ \angle(mk) = 80^\circ,\ \angle(kn) = 100^\circ.$$

Ответ: 80° и 100°.

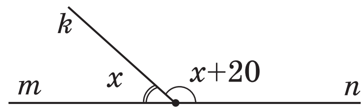


Рис. 7.25

Вертикальные углы

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного из них являются дополнительными полупрямыми к сторонам другого угла. a и a_1; b и b_1 — дополнительные полупрямые (рис. 7.26).

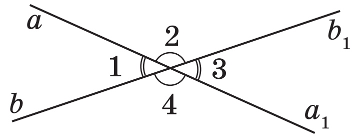


Рис. 7.26

Вертикальные углы равны.

То есть $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$.

Следствие. Если один из углов, полученных при пересечении двух прямых, равен 90°, то прямые перпендикулярны (рис. 7.27):

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 90^\circ.$$

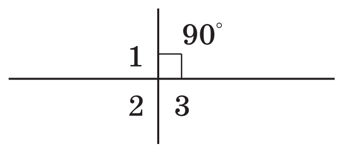


Рис. 7.27

Задача 2. Один из углов, которые получились при пересечении двух прямых, в 5 раз больше другого. Найти углы, получившиеся при пересечении прямых.

Решение:

Два угла, которые получились при пересечении двух прямых, либо смежные, либо вертикальные. Искомые углы не равны, значит, они не вертикальные, а смежные. Например, $\angle 1$ и $\angle 2$ (рис. 7.28).

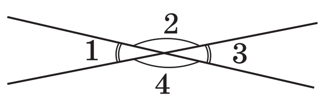


Рис. 7.28

Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = 5x$. По теореме о смежных углах: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$; $x + 5x = 180^\circ$; $x = 30^\circ$; $5x = 150^\circ$. $\angle 1 = 30^\circ$; $\angle 2 = 150^\circ$.

По теореме о вертикальных углах: $\angle 3 = \angle 1 = 30^\circ$; $\angle 4 = \angle 2 = 150^\circ$.

Ответ: 30°, 150°, 30°, 150°.

Задача 3. Сумма углов, которые получились при пересечении двух прямых, равна 72°. Найти эти углы.

Решение:

Используем рассуждения из предыдущей задачи. Сумма двух углов равна 72°. Это не могут быть смежные углы (их сумма 180°), значит, это углы вертикальные, а они равны (рис. 7.29):

$$\angle 1 = \angle 2 = 72° : 2 = 36°.$$

Ответ: 36°.

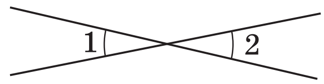


Рис. 7.29

Биссектриса угла — луч, который выходит из вершины угла и делит его пополам (рис. 7.30):

$$\angle(ab) = \angle(bc).$$

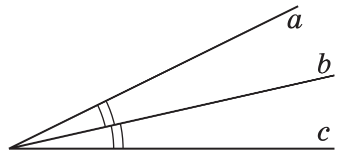


Рис. 7.30

Задача 4. Найти угол между биссектрисами смежных углов (рис. 7.31).

Решение:

Биссектриса — луч, который делит угол пополам.

Сложим почленно равенства:

$$\begin{array}{l} \angle(mb) = \frac{1}{2}\angle(ab) \\ + \\ \angle(nb) = \frac{1}{2}\angle(bc) \\ \hline \angle(mb) + \angle(nb) = \frac{1}{2}(\angle(ab) + \angle(bc)) \end{array}$$

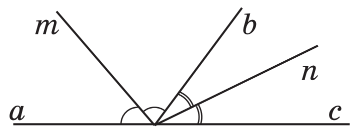


Рис. 7.31

Но $\angle(mb) + \angle(nb) = \angle(mn)$, а $\angle(ab) + \angle(bc) = 180°$ (по теореме о смежных углах).

Получим: $\angle(mn) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

Ответ: 90°.

Задача 5. Найти угол между биссектрисой и продолжением одной из сторон угла, равного 140° (рис. 7.32).

Решение:

m — биссектриса, поэтому $\angle(mb) = 140° : 2 = 70°$. Но $\angle(mb)$ и искомый $\angle(b_1m)$ — смежные, их сумма 180°. Тогда $\angle(b_1m) = 180° - 70° = 110°$.

Ответ: 110°.

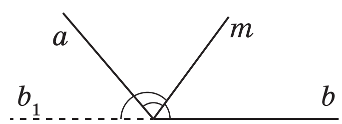


Рис. 7.32

7.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых

Прямая — одно из основных понятий геометрии, ее понятие лишь косвенно определяется аксиомами геометрии, например, в том, что через две точки можно провести лишь одну прямую.

Перпендикулярные прямые

Две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под углом 90° (рис. 7.33):

$$a \perp b; \ \angle(ab) = 90°.$$

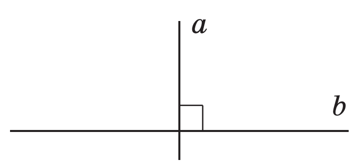
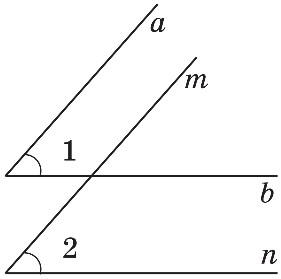
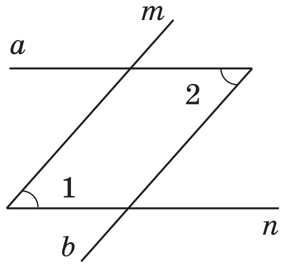


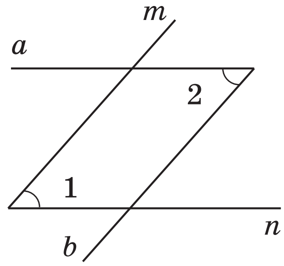
Рис. 7.33

Углы с параллельными или перпендикулярными сторонами

1. Для углов с соответственно параллельными сторонами справедливо:
   а) $a \parallel m$; $b \parallel n$; $\angle 1 = \angle 2$
   б) $a \parallel m$; $b \parallel n$; $\angle 1 = \angle 2$
   в) $a \parallel m$; $b \parallel n$; $\angle 2 = 180° - \angle 1$

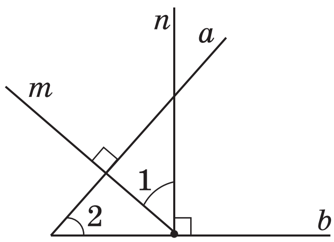


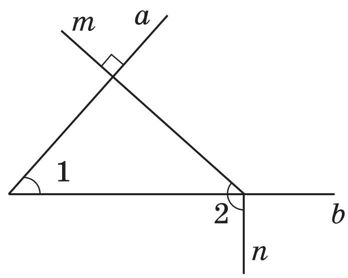




Если стороны a и b одного угла соответственно параллельны сторонам m и n другого угла, то углы равны или дополняют друг друга до развернутого (их сумма 180°).

2. Аналогично углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны или дополняют друг друга до развернутого (их сумма равна 180°):
   а) $a \perp m$; $b \perp n$; $\angle 1 = \angle 2$;
   б) $a \perp m$; $b \perp n$; $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.





Параллельные прямые

Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 7.34).

$a \parallel b$

Рис. 7.34

Аксиома параллельных прямых: через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной, и только одну (рис. 7.35).

$K \in m$; $K \notin a$; $m \parallel a$, m — единственная.

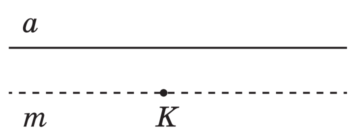


Рис. 7.35

Чтобы сформулировать признаки параллельности прямых, рассмотрим, как называются углы, образованные при пересечении секущей двух прямых.

Пусть a и b — прямые, c — секущая (пересекает a и b) (рис. 7.36). Тогда пары углов имеют названия:

- **внутренние односторонние:** $\angle 2$ и $\angle 5$ или $\angle 3$ и $\angle 8$;
- **внутренние накрест лежащие:** $\angle 2$ и $\angle 8$ или $\angle 3$ и $\angle 5$;
- **соответственные:** $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$ или $\angle 3$ и $\angle 7$.

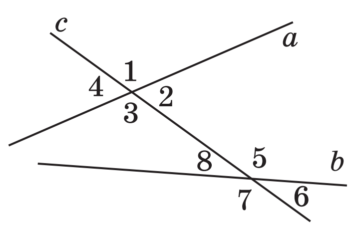


Рис. 7.36

Признаки параллельности прямых

1. **Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.** Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$ (рис. 7.37).
2. **Две прямые, пересекаемые третьей прямой, параллельны** (рис. 7.38), **если:**
   а) **внутренние накрест лежащие углы равны:** если $\angle 2 = \angle 8$ или $\angle 3 = \angle 5$, то $a \parallel b$;
   б) **сумма внутренних односторонних углов равна 180°**, т. е. если $\angle 3 + \angle 8 = 180°$ или $\angle 2 + \angle 5 = 180°$, то $a \parallel b$;
   в) **соответственные углы равны:** если $\angle 4 = \angle 8$; $\angle 3 = \angle 7$; $\angle 1 = \angle 5$ или $\angle 2 = \angle 6$, то $a \parallel b$.
3. **Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны** (рис. 7.39). Если $a \perp m$ и $b \perp m$, то $a \parallel b$.

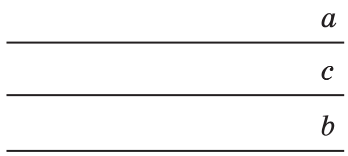


Рис. 7.37

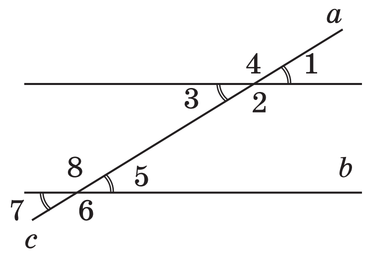


Рис. 7.38

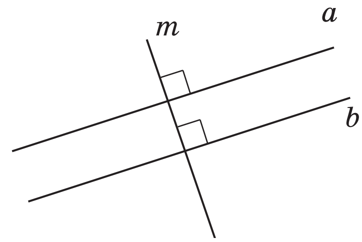


Рис. 7.39

Задача 1. Прямые a и b пересекаются прямой c (рис. 7.40). Доказать, что $a \parallel b$, если: 1) $\angle 1 = 33°$; $\angle 6 = 147°$; 2) $\angle 4 = \angle 6$; 3) $\angle 7 = 45°$; $\angle 8 = 3 \cdot \angle 1$.

Доказательство:

1) $\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 3 = 33° \\ \angle 6 = \angle 8 = 147°\end{array}\right\}$ как вертикальные. Тогда $\angle 3 + \angle 8 = 33° + 147° = 180°$, а это внутренние односторонние углы. Следовательно, $a \parallel b$, что и требовалось доказать.

2) $\angle 4 = \angle 2$, а $\angle 6 = \angle 8$ как вертикальные, значит, $\angle 2 = \angle 8$, а это внутренние накрест лежащие углы, $a \parallel b$ по признаку параллельности прямых.

3) $\angle 7 = 45°$, тогда $\angle 5 = \angle 7 = 45°$ (вертикальные), но $\angle 8 + \angle 5 = 180°$ (смежные), значит, $\angle 8 = 180° - 45° = 135°$. $\angle 8 = 3 \cdot \angle 1$, т. е. $\angle 1 = \dfrac{1}{3}\angle 8 = \dfrac{1}{3} \cdot 135° = 45°$.

$\angle 1 = \angle 3 = 45°$ (вертикальные).

Получили, что $\angle 3 = \angle 5 = 45°$, а это внутренние накрест лежащие углы, значит, $a \parallel b$ по признаку параллельности прямых.

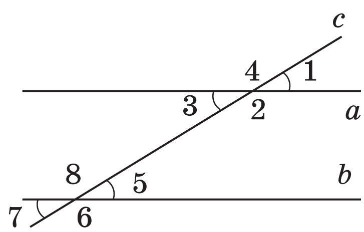


Рис. 7.40

Задача 2. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, точки M, N, K и P — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 7.41). Доказать, что $MN \parallel PK$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC. MN — средняя линия, т. е. отрезок, соединяющий середины сторон треугольника.

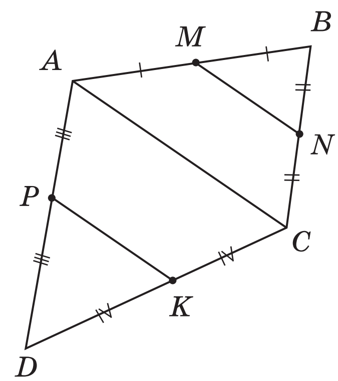


Рис. 7.41

По теореме о средней линии треугольника $MN \parallel AC$.

Аналогично в ΔACD: PK — средняя линия и $PK \parallel AC$. Получили, что $MN \parallel AC$ и $PK \parallel AC$, по признаку параллельности прямых $MN \parallel PK$, что и требовалось доказать.

Свойства параллельных прямых

1. $a \parallel b$.
   Если две параллельные прямые пересечены третьей (рис. 7.42), то:
   а) **внутренние накрест лежащие углы равны:** $\angle 3 = \angle 5$; $\angle 4 = \angle 6$;
   б) **сумма внутренних односторонних углов равна 180°**, $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 6 = 180°$;
   в) **соответственные углы равны:** $\angle 1 = \angle 5$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 7$ и $\angle 4 = \angle 8$.
2. **Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой** (рис. 7.43). Если $a \parallel b$ и $a \perp m$, то $b \perp m$.
3. **Если две пересекающиеся прямые соответственно параллельны двум перпендикулярным прямым, то они перпендикулярны** (рис. 7.44). Если $a \perp b$ и $a \parallel n$, $b \parallel m$, то $m \perp n$.

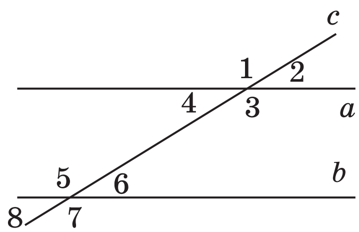


Рис. 7.42

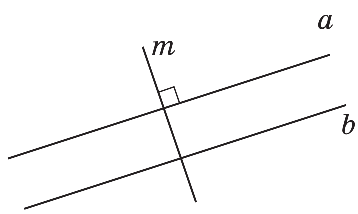


Рис. 7.43

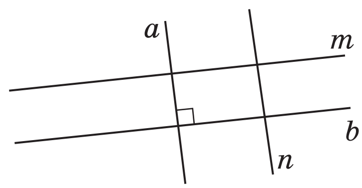


Рис. 7.44

Задача 3. По данным рис. 7.45 найти угол x.

Решение:

$\angle 1 = 69°$ (вертикальный с данным углом).

$\angle 1 + \angle 111° = 69° + 111° = 180°$, а это внутренние односторонние углы. Значит, по признаку параллельности $a \parallel b$ с секущей c.

Рассмотрим $a \parallel b$, где d — секущая.

$\angle 2 = 105°$, т. к. это вертикальные углы.

$x = \angle 2 = 105°$ как соответственные (свойство параллельных прямых).

Задача 4. Два тела P_1 и P_2 подвешены на концах троса, перекинутого через блоки B и D. Третье тело P_3 подвешено на том же тросе в точке C и уравновешивает тела P_1 и P_2 ($AB \parallel CK \parallel DE$) (рис. 7.46).

1) Доказать, что $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.

2) Найти $\angle ABC$, если $\angle BCD = 80°$, $\angle CDE = 27°$.

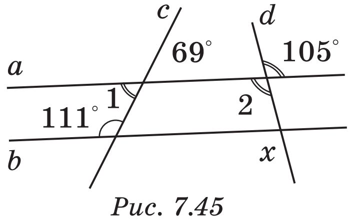


Рис. 7.45

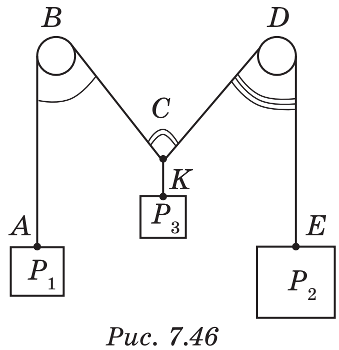


Рис. 7.46

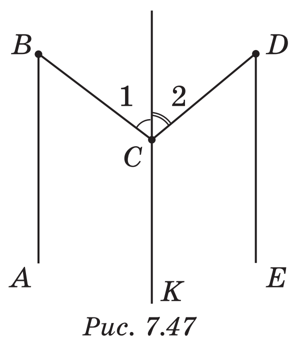


Рис. 7.47

Решение:

1) $\angle BCD = \angle 1 + \angle 2$, но $\angle 1 = \angle ABC$ и $\angle 2 = \angle CDB$, поскольку $AB \parallel CK \parallel DE$ (по свойству параллельных прямых внутренние накрест лежащие углы равны). Тогда $\angle BCD = \angle 1 + \angle 2 = \angle ABC + \angle CDE$, что и требовалось доказать (рис. 7.47).

2) $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$, тогда $\angle ABC = \angle BCD - \angle CDE = 80° - 27° = 53°$.

Ответ: 53°.

7.1.4. Отрезок. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой

Отрезок — это часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя ее точками. Это точки — концы отрезка (рис. 7.48).

Рис. 7.48

Перпендикуляр к прямой — это отрезок, перпендикулярный данной прямой, один из концов которого лежит на этой прямой. Этот конец называют **основанием перпендикуляра.**

$AB \perp m$, AB — перпендикуляр, точка B — основание перпендикуляра (рис. 7.49).

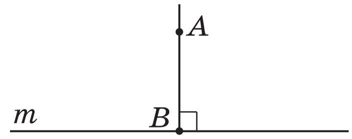


Рис. 7.49

Из любой точки, не лежащей на прямой, можно опустить перпендикуляр на эту прямую, и притом только один.

Иногда в задачах необходимо найти расстояние от точки до прямой.

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую (рис. 7.50).

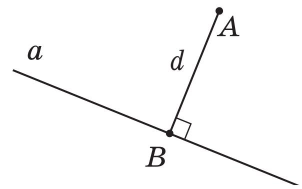


Рис. 7.50

Расстояние между параллельными прямыми — это расстояние от любой точки одной прямой до другой прямой, т. е. длина общего перпендикуляра к двум параллельным прямым (рис. 7.51).

$a \parallel b$; $MN \perp a$ и $MN \perp b$. MN — расстояние между a и b.

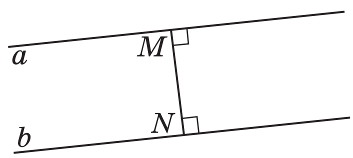


Рис. 7.51

Отрезок AB, где точка A не лежит на прямой a, а точка B лежит на прямой a, называется **наклонной**, которая проведена из точки A на прямую a, если отрезок AB не перпендикулярен прямой a. Точка B — **основание наклонной** AB, BH — **проекция наклонной** AB на прямую a. Очевидно, что ΔABH — прямоугольный ($AH \perp a$) (рис. 7.52).

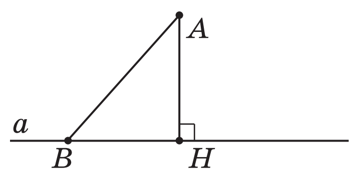


Рис. 7.52

Свойства перпендикуляра и наклонной

1. **Наклонная, проведенная из точки к прямой, всегда больше перпендикуляра, проведенного из этой же точки, и больше своей проекции** (рис. 7.53). $AC > AB$ и $AC > BC$.

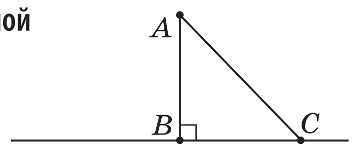


Рис. 7.53

2. **Если равны наклонные, проведенные из одной точки, то равны и их проекции и наоборот** (рис. 7.54). То есть если $AC = AK$, то $BC = BK$, и если $BC = BK$, то $AC = AK$.

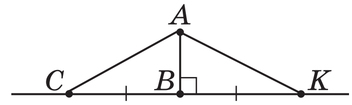


Рис. 7.54

3. **Если из одной точки проведены две наклонные, то большая наклонная имеет большую проекцию, меньшая наклонная — меньшую проекцию** (рис. 7.55). Если $AC > AD$, то $BC > BD$ и обратно: если $BC > BD$, то $AC > AD$.

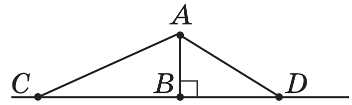


Рис. 7.55

Задача 1. Из точки M к прямой a провели перпендикуляр MK и наклонную MA. Угол между наклонной и прямой равен 30°. Сумма длин наклонной и перпендикуляра — 12 см. Найти длину проекции наклонной на прямую a (рис. 7.56).

Решение:

Пусть $MK = x$, тогда $MA = 2x$, т. к. в прямоугольном треугольнике MKA ($MK \perp AK$), MA — гипотенуза, MK — катет, лежащий против угла 30° и равный половине гипотенузы (рис. 7.56). Тогда $x + 2x = 12$; $3x = 12$; $x = 4$; $2x = 8$.

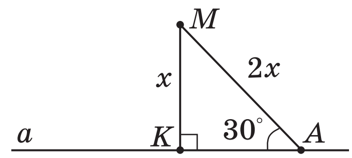


Рис. 7.56

$MK = 4$ см; $MA = 8$ см. По теореме Пифагора: $AK^2 = MA^2 - MK^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$; $AK = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см.

Задача 2. Из одной точки к прямой проведены две наклонные, длины которых относятся как 5 : 6. Найти расстояние от точки до прямой, если проекции наклонных равны 4 см и $3\sqrt{3}$ см (рис. 7.57).

Решение:

Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра AB. Из этой же точки провели две наклонные $AD > AC$. Пусть $AD = 6x$, $AC = 5x$. Большей наклонной соответствует большая проекция, $3\sqrt{3} > 4$, поэтому $BC = 4$; $BD = 3\sqrt{3}$.

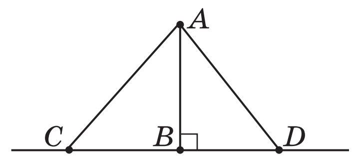


Рис. 7.57

ΔACB и ΔABD — прямоугольные ($AB \perp CD$) с общим катетом AB.

Из ΔABD: $AB^2 = AD^2 - BD^2 = (6x)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 36x^2 - 27$.

Из ΔABC: $AB^2 = AC^2 - BC^2 = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$.

Получим уравнение: $36x^2 - 27 = 25x^2 - 16$; $11x^2 = 11$; $x = 1$ ($x > 0$).

$AB^2 = 25x^2 - 16 = 25 - 16 = 9$; $AB = 3$.

Ответ: 3 см.

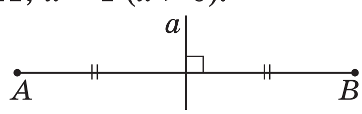


Рис. 7.58

Серединный перпендикуляр к отрезку — это прямая, проходящая через середину этого отрезка и перпендикулярная к нему (рис. 7.58).

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему (рис. 7.59).

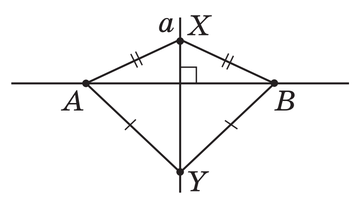


Рис. 7.59

Если a — серединный перпендикуляр к AB, то $AX = XB$ ($X \in a$) или $AY = YB$ ($Y \in a$). Обратно: если $AX = XB$, то $X \in a$ (рис. 7.59).

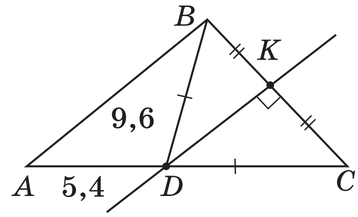


Рис. 7.60

Задача 3. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найти AC, если $BD = 9{,}6$ см, $AD = 5{,}4$ см (рис. 7.60).

Решение:

BK — серединный перпендикуляр, тогда $DB = DC = 9{,}6$ см.

$$AC = AD + DC = 5{,}4 + 9{,}6 = 15 \text{ (см)}.$$

Ответ: 15 см.

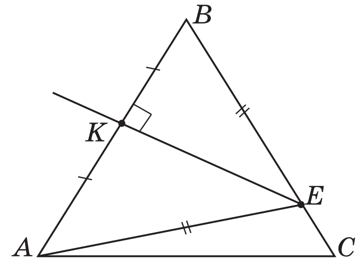


Рис. 7.61

Задача 4. Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного ΔABC пересекает сторону BC в точке E. Периметр ΔAEC равен 45 см, $AB = 25$ см. Найти основание AC.

Решение:

По свойству серединного перпендикуляра каждая точка равноудалена от концов отрезка, т. е. $AE = BE$ (рис. 7.61).

$P_{\Delta AEC} = AE + EC + AC$, тогда $AC = P_{\Delta AEC} - (AE + EC)$.

Но $AE = BE$, тогда $AC = P_{\Delta AEC} - (BE + EC) = P_{\Delta AEC} - BC = P_{\Delta AEC} - AB = 45 - 25 = 20$.

Ответ: 20 см.

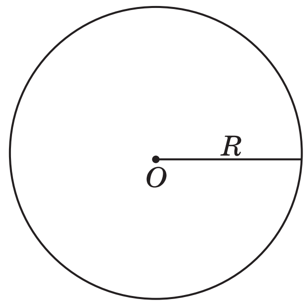


Рис. 7.62

7.1.5. Понятие о геометрическом месте точек

Геометрическим местом точек (ГМТ) плоскости называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, обладающих определенными свойствами, причем:

- если точка принадлежит фигуре, она обязательно обладает этим свойством;
- если точка обладает этим свойством, то она обязательно принадлежит фигуре.

ГМТ в планиметрии:

1. **Окружность** — геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (центра). Каждая точка окружности находится на расстоянии от центра, равном радиусу. Никакая другая точка плоскости этим свойством не обладает (рис. 7.62).
2. **Серединный перпендикуляр к отрезку** — геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек (рис. 7.63).

   Если $AO = OB$ и $l \perp AB$,

   то $AD = DB$; $AC = CB$, $AM = MB$ и т. д.
3. **Биссектриса угла** — геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла (рис. 7.64).

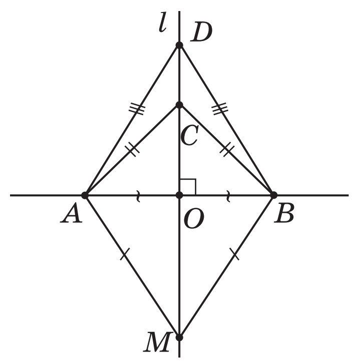


Рис. 7.63

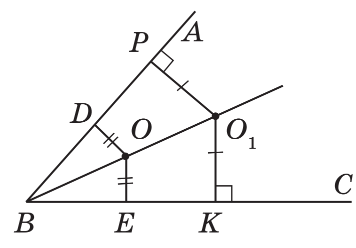


Рис. 7.64

BO — биссектриса $\angle ABC$.

Тогда $DO \perp AB$ и $OE \perp BC$; $DO = OE$; $O_1P \perp AB$, $O_1K \perp BC$; $PO_1 = O_1K$.

4. **Две прямые, параллельные данной,** — геометрическое место точек, удаленных от данной прямой a на расстояние d, — это прямые m и n (рис. 7.65).

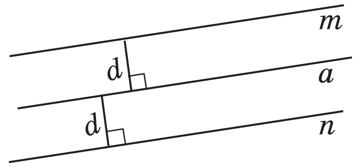


Рис. 7.65

Метод геометрических мест

Сущность метода заключается в следующем:

- пусть требуется найти точку x, удовлетворяющую двум заданным условиям;
- фигура F_1 — геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, а фигура F_2 — геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию;
- искомая точка x — точка их пересечения, поскольку они одновременно принадлежат фигурам F_1 и F_2.

Задача 1. Даны точки A, B и C. Построить точку x, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на заданном расстоянии от точки C (рис. 7.66).

Решение:

Искомая точка x удовлетворяет двум условиям:

1) она одинаково удалена от точек A и B. Геометрическим местом точек, удовлетворяющим этому условию, является прямая, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (серединный перпендикуляр к AB);
2) точка x должна находиться на данном расстоянии от точки C. Геометрическим местом точек, удовлетворяющим второму условию, является окружность радиуса $R = xC$ с центром в точке C. Искомая точка x (а точнее, x_1 и x_2) лежит на пересечении этих геометрических мест.

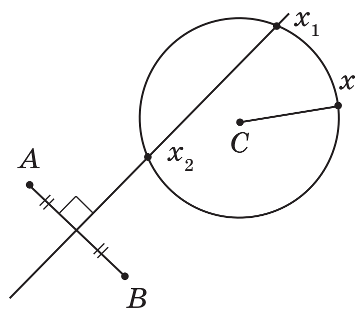


Рис. 7.66

Примечание. В зависимости от положения точек A, B и C данная задача может не иметь решения (если окружность с центром в точке C и серединный перпендикуляр не имеют общих точек) или иметь одно решение (если окружность и серединный перпендикуляр имеют одну общую точку, т. е. касаются).

Задача 2. Стороны угла M касаются окружности с центром O и радиусом r. Найти MO, если $r = 10$ см, $\angle M = 60°$ (рис. 7.67).

Решение:

По свойству двух касательных, выходящих из одной точки, биссектриса угла между касательными проходит через центр. Тогда $\angle OMB = 30°$, $\angle MBO = 90°$ (радиус OB проведен в точку касания и перпендикулярен касательной). В ΔMOB катет OB лежит против угла $30°$, он равен половине гипотенузы, значит, $MO = 10 \cdot 2 = 20$ (см).

Ответ: 20 см.

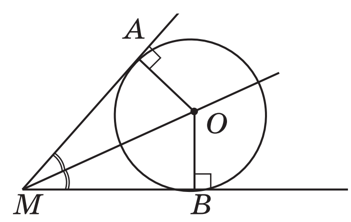


Рис. 7.67

7.1.6. Преобразование плоскости. Движение. Симметрия

Существуют следующие преобразования плоскости:

- движение;
- подобие.

Движение

Движение — это преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между плоскостями.

Свойства движения:

1. Два движения, выполненные последовательно, снова дают движением.
2. Преобразование, обратное движению, тоже является движением.
3. Точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.
4. При движении прямые переходят в прямые, лучи — в лучи, отрезки — в отрезки.
5. Сохраняются углы между полупрямыми.

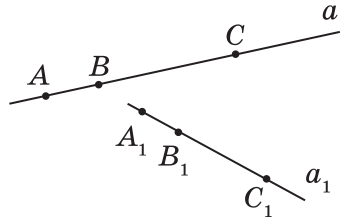


Рис. 7.68

Виды движения:

- симметрия относительно точки;
- симметрия относительно прямой;
- поворот;
- параллельный перенос.

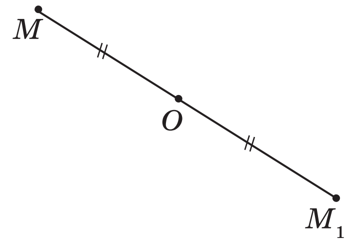


Рис. 7.69

Симметрия относительно точки

Пусть O — фиксированная точка, точка M — произвольная точка (рис. 7.69).

Отложим на продолжении отрезка MO за точку O отрезок $OM_1 = OM$. Получим точку M_1. Эта точка симметрична относительно точки O.

Преобразование плоскости, при котором каждая ее точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно точки O, называется **преобразованием симметрии относительно точки** O, или **центральной симметрией**.

Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру в себя, то фигура называется **центрально-симметричной**, а точка O — центром симметрии (рис. 7.70).

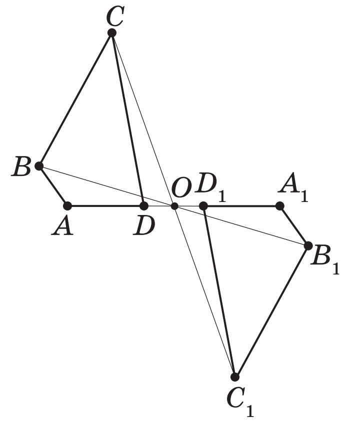
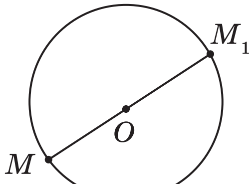
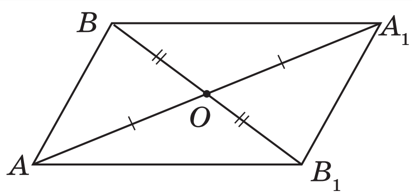


Рис. 7.70

Примеры центрально-симметричных фигур

Окружность	Параллелограмм
	
O — центр симметрии	Центр симметрии — точка пресечения диагоналей

Задача 1. Найти точку, симметричную точке $A(2; -1)$ относительно (рис. 7.71):

а) начала координат;

б) точки $Q(1; 1)$.

Решение:

а) отложим на продолжении отрезка MO отрезок M_1O такой, что $MO = M_1O$. Получим точку $M_1(-2; 1)$;

б) продолжим отрезок MQ, отложим $MQ = QM_2$; получим точку $M_2(0; 3)$.

Ответ: $M_1(-2; 1)$; $M_2(0; 3)$.

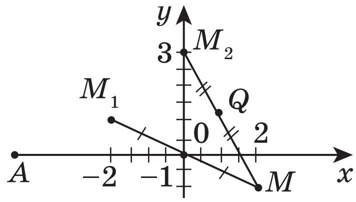


Рис. 7.71

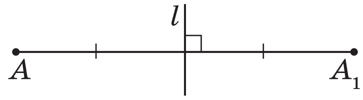


Рис. 7.72

Симметрия относительно прямой

Пусть l — фиксированная прямая. Точка A — произвольная точка плоскости. Проведем $AA_1 \perp l$ и $AB = BA_1$. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой l (рис. 7.72).

Преобразование плоскости, при котором каждая ее точка A переходит в точку A_1, симметричную относительно прямой l, называется **преобразованием симметрии относительно прямой l**, или **осевой симметрией.**

Если преобразование симметрии относительно прямой l переводит фигуру в себя, то фигура называется **симметричной относительно прямой l**, а прямая l — **осью симметрии** (рис. 7.73).

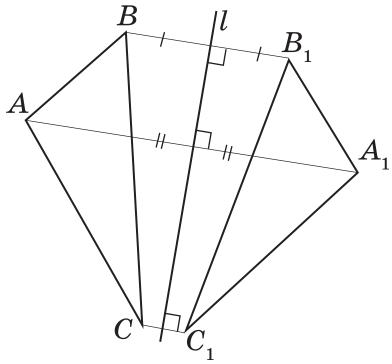
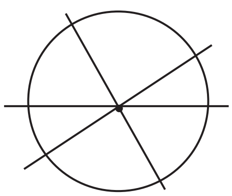
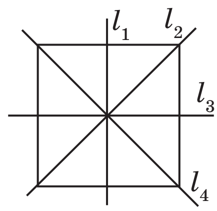
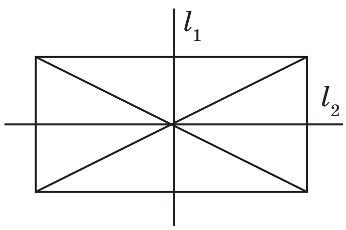
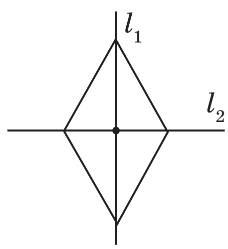
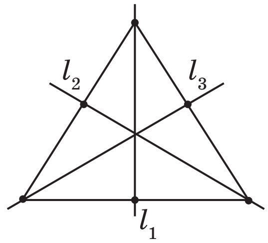


Рис. 7.73

Примеры фигур, имеющих ось симметрии

Окружность	Квадрат
	
Имеет бесконечное множество осей симметрии (любой диаметр является осью симметрии)	Имеет четыре оси симметрии

Прямоугольник	Ромб	Треугольник
		
Имеет две оси симметрии	Имеет две оси симметрии	Имеет три оси симметрии

Поворот

Пусть O — фиксированная точка плоскости, A — произвольная точка (рис. 7.74). Задан угол α и направление поворота — по часовой стрелке или против нее. Отложим от луча OA в заданном направлении $\angle AOA_1 = \alpha$ и $AO = OA_1$. Точка A_1 — образ точки A при повороте точки O на угол α в заданном направлении.

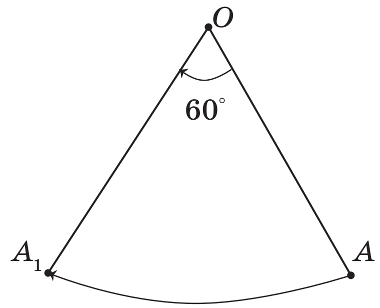


Рис. 7.74

Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α в заданном направлении (по часовой стрелке или против нее) называется преобразование плоскости, при котором точка A отображается в такую точку A_1, что $OA = OA_1$, $\angle AOA_1 = \alpha$ и угол отложен в заданном направлении.

Задача 3. Построить фигуру, в которую переходит прямоугольный ΔABC при повороте против часовой стрелки на 90°.

Решение:

При повороте на 90° против часовой стрелки прямоугольный ΔABC перейдет в прямоугольный $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 7.75).

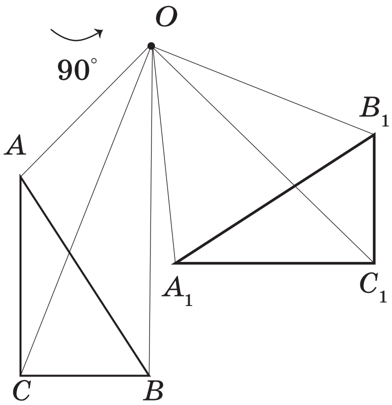


Рис. 7.75

Параллельный перенос

В прямоугольной системе координат параллельный перенос, который переводит точку $A(x;\ y)$ в точку $A_1(x_1;\ y_1)$, задается формулами: $x_1 = x + A$; $y_1 = y + B$.

Преобразование плоскости, при котором каждая точка $A(x;\ y)$ переходит в точку $A_1(x + A;\ y + B)$, где A и B — одни и те же числа для всех точек плоскости, называется **параллельным переносом**.

Задача 4. Дана фигура $ABCDE$. Построить фигуру $A_1B_1C_1D_1E_1$, в которую она переходит с помощью параллельного переноса, заданного формулами: $x_1 = x + 3$; $y_1 = y - 10$.

Решение:

$A(1;\ 3) \to A_1(4;\ -7)$

$B(3;\ 8) \to B_1(6;\ -2)$

$C(6;\ 6) \to C_1(9;\ -4)$

$D(4;\ 5) \to D_1(7;\ -5)$

$E(6;\ 1) \to E_1(9;\ -9)$

Получим фигуру $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 7.76).

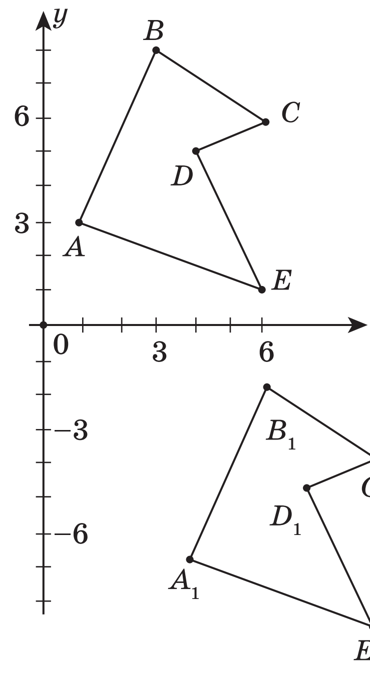


Рис. 7.76

Задача 5. Точка $A(-2;\ 4)$ при параллельном переносе перешла в точку $A_1(3;\ -1)$. В какую точку при этом же переносе перейдет точка $M(-5;\ -1)$?

Решение:

Найдем формулу параллельного переноса, если точка $A(-2;\ 4)$ перешла в точку $A_1(3;\ -1)$.

$$A = 3 - (-2) = 5;\ B = -1 - 4 = -5;$$

$$x_1 = x + 5;\ y_1 = y - 5.$$

Тогда точка M перейдет в точку с координатами $x_{M_1} = -5 + 5 = 0$ и $y_{M_1} = -1 - 5 = -6$.
Ответ: $M_1(0; -6)$.

7.2. Треугольник

7.2.1. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника; точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан, высот или их продолжений

Высота

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону (рис. 7.77—7.79).

В любом треугольнике можно провести три высоты.

Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке. Эта точка называется **ортоцентром** треугольника.

Рассмотрим положение ортоцентра в зависимости от вида треугольника. В **остроугольном** треугольнике точка пересечения высот находится **внутри области треугольника** (рис. 7.80).

В **тупоугольном** треугольнике точка пересечения прямых, содержащих высоты, находится **вне области треугольника** (рис. 7.81).

В прямоугольном треугольнике катеты являются высотами (рис. 7.82). AC — высота к стороне AB, BC — высота к стороне AC, AC — высота к стороне BC, точка C — точка пересечения высот.

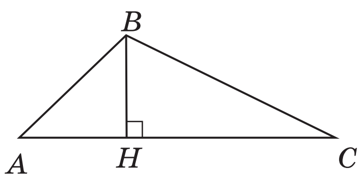


Рис. 7.77

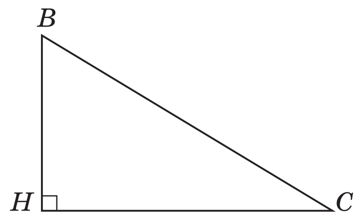


Рис. 7.78

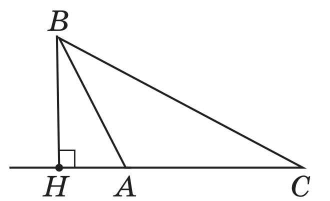


Рис. 7.79

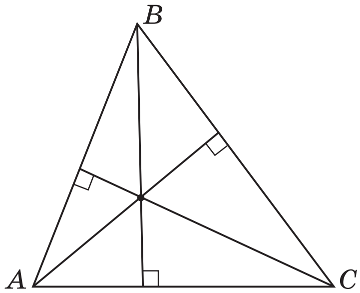


Рис. 7.80

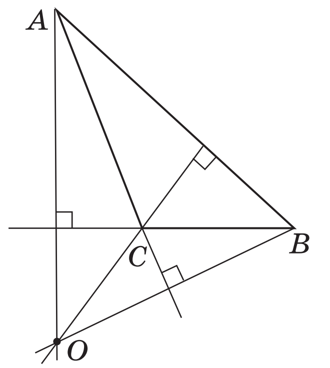


Рис. 7.81

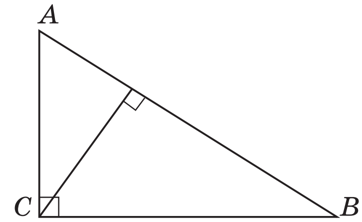


Рис. 7.82

Медиана

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. В треугольнике можно провести три медианы: AK, BM и CN (рис. 7.83).

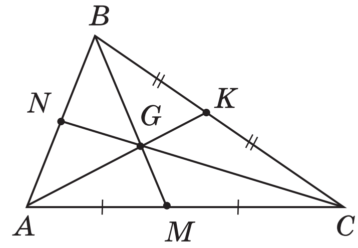


Рис. 7.83

Медианы треугольника пересекаются в одной точке. Обычно эту точку обозначают буквой G (от англ. *gravity* — сила тяжести). Точку G называют **центром треугольника**, или **центром масс**.

Свойство медианы треугольника

Точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника:

$BG : GM = 2 : 1$; $CG : GN = 2 : 1$; $AG : GK = 2 : 1$.

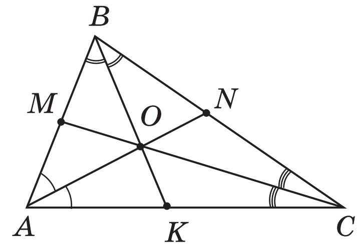


Рис. 7.84

Биссектриса

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны (рис. 7.84).

В любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке.

Эта точка является **центром вписанной в треугольник окружности.**

AM, BN, CK — биссектриса ΔABC (рис. 7.85).

Точка O — центр вписанной в треугольник окружности.

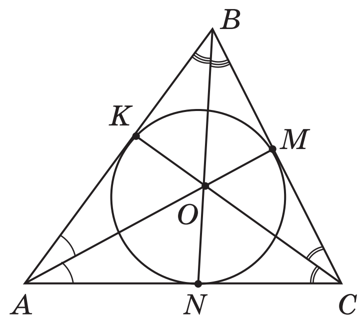


Рис. 7.85

Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилегающим сторонам (рис. 7.86):

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

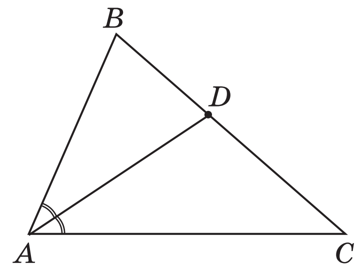


Рис. 7.86

Серединный перпендикуляр

Серединный перпендикуляр — прямая, проходящая через середину отрезка, перпендикулярного к нему.

В треугольнике можно провести серединный перпендикуляр к каждой стороне. Эти три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке. Точка пересечения серединных перпендикуляров — **центр окружности, описанной около этого треугольника** (рис. 7.87).

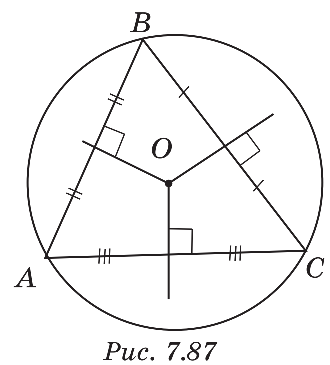


Рис. 7.87

Задача 1. Биссектриса проведена к боковой стороне равнобедренного треугольника и делит ее на отрезки 25 см и 30 см, считая от вершины, противолежащей основанию. Найти периметр треугольника.

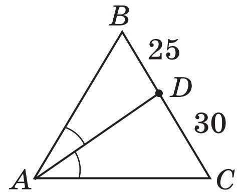


Рис. 7.88

Решение:

$AB = BC = 55$ см. По свойству биссектрисы:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC};\ \frac{25}{30} = \frac{55}{AC};\ AC = \frac{30 \cdot 55}{25} = 66.$$

$$P_{\Delta ABC} = 55 + 55 + 66 = 176 \text{ (см) (рис. 7.88)}.$$

Ответ: 176 см.

Задача 2. Основание равнобедренного треугольника больше его боковой стороны на 9 см. Расстояние от точки пересечения медиан до основания треугольника равно 3 см. Найти периметр треугольника.

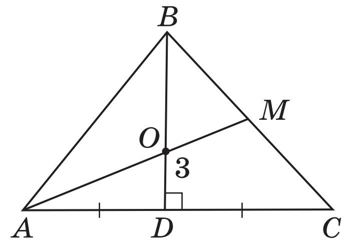


Рис. 7.89

Решение:

ΔABC — равнобедренный, и медиана BD является высотой (рис. 7.89), т. е. $BD \perp AC$, значит, OD — расстояние от точки пересечения медиан до основания. По свойству медиан $BO : OD = 2 : 1$; тогда $BO = 6$ см; $BD = 6 + 3 = 9$ см. Пусть $AD = x$, тогда $AC = 2x$, но боковая сторона на 9 см меньше, т. е. $AB = 2x - 9$. Из ΔABD ($\angle ABD = 90°$) по теореме Пифагора:

$AB^2 = AD^2 + BD^2$; $(2x - 9)^2 = x^2 + 9^2$; $4x^2 - 36x + 81 = x^2 + 81$; $3x^2 - 36x = 0$; $x = 0$ (не подходит по смыслу) или $x = 12$; $AC = 2x = 24$; $AB = BC = 2x - 9 = 15$;

$$P = 15 + 15 + 24 = 54 \text{ (см)}.$$

Ответ: 54 см.

Задача 3. Катет прямоугольного треугольника равен 18 см, а точка, которая принадлежит этому катету, удалена от гипотенузы и другого катета на 8 см. Найти площадь треугольника (рис. 7.90).

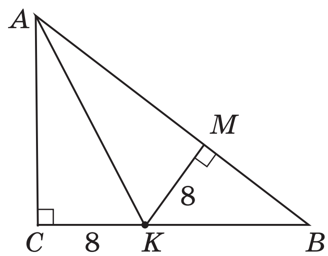


Рис. 7.90

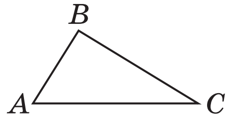
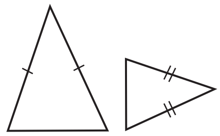
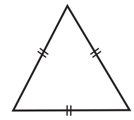
Решение:

Пусть ΔABC — прямоугольный, его катет $BC = 18$ см. Точка $K \in BC$. Точка K удалена от гипотенузы и другого катета на 8 см, это значит, что $CK \perp AC$ и $KM \perp AB$ и $CK = KM = 8$ см. Точка K равноудалена от сторон угла A, значит, AK — биссектриса этого угла. По свойству биссектрисы: $\frac{CK}{KB} = \frac{AC}{AB}$; $KB = 18 - 8 = 10$ (см); $\frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Пусть $AC = 4x$, $AB = 5x$, тогда $BC = 3x$ (египетский треугольник). $3x = 18$; $x = 6$, тогда $AC = 4 \cdot 6 = 24$. Тогда

$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{24 \cdot 18}{2} = 216$ (см^2). *Ответ*: 216 см^2.

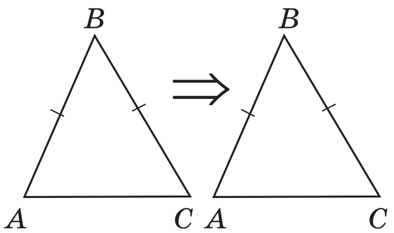
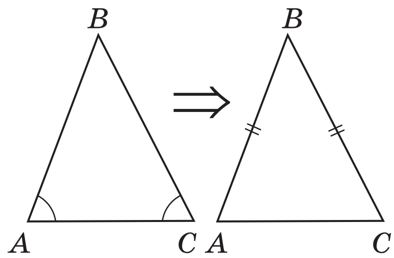
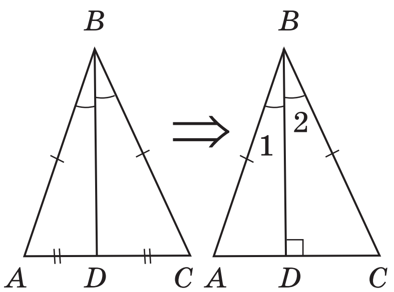
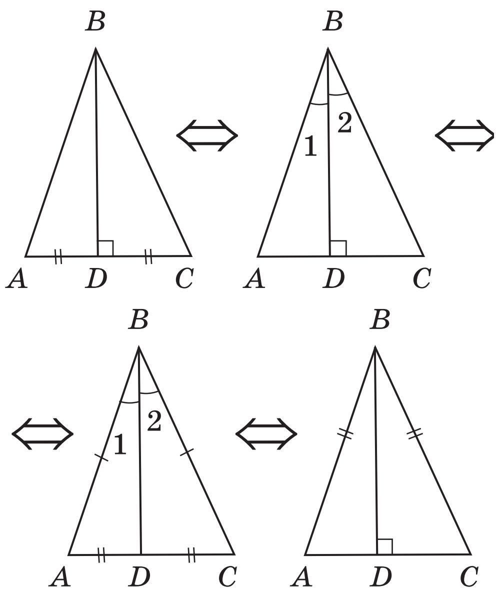
7.2.2. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Свойства и признаки равнобедренного треугольника

В зависимости от соотношения сторон выделяют такие виды треугольников:

		
разносторонний — все его стороны разные	**равнобедренный** — равны две стороны	**равносторонний (правильный)** — все стороны равны

Равнобедренный треугольник

В ΔABC стороны AB и BC равны, т. е. он равнобедренный. Эти равные стороны (AB и BC) называются **боковыми**, а третья сторона (AC) — **основанием треугольника**.

Свойства равнобедренного треугольника	**Признаки равнобедренного треугольника**
 $AB = BC \Rightarrow \angle A = \angle B$ В равнобедренном треугольнике углы при основании равны	 $\angle A = \angle B \Rightarrow AB = BC$ Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник — равнобедренный
 $AB = BC$ и $AD = DC \Rightarrow AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$; $BD \perp AC$ В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой	 $AD = DC$ и $BD \perp AC \Leftrightarrow \angle 1 = \angle 2$, $AC \perp BD \Leftrightarrow \angle 1 = \angle 2$, $AD = DC \Leftrightarrow AB = BC$ Если в треугольнике совпадают: а) высота и медиана; б) высота и биссектриса; в) медиана и биссектриса, то треугольник — равнобедренный

Примечание. Теоремы, записанные в левой и правой частях таблицы, являются наглядным примером **прямых** и **обратных** теорем (т. е. теорем, в которых условие и заключение меняются местами).

Дополнительные свойства равнобедренного треугольника:

1. **Биссектрисы углов при основании равны** (рис. 7.91).
   Если $AB = BC$, то $AK = CM$, где AK и CK — биссектрисы, т. е. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.
2. **Медианы, проведенные к боковым сторонам, равны** (рис. 7.92).
   Если $AM = MB = BN = NC$, то $AN = CM$.
3. **Высоты, проведенные к боковым сторонам, равны** (рис. 7.93).
   Если $AB = BC$ и $AN \perp BC$ и $CM \perp AB$, то $CM = AN$.

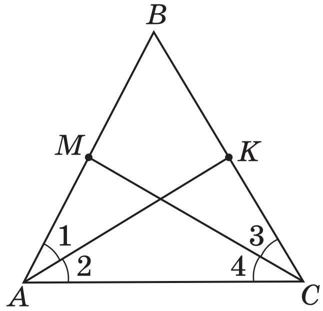


Рис. 7.91

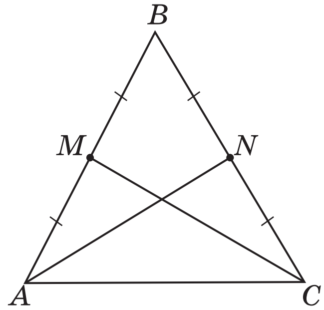


Рис. 7.92

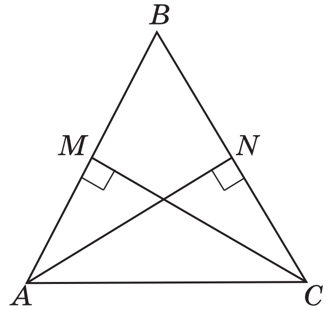
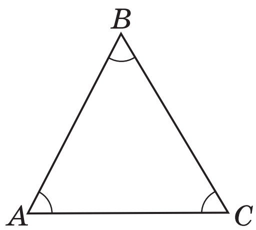
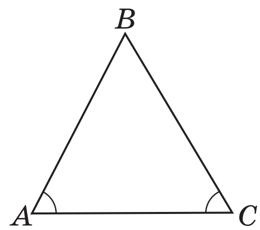
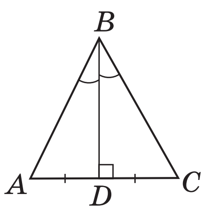
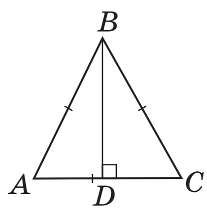


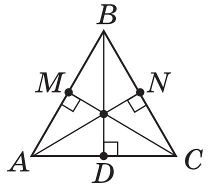
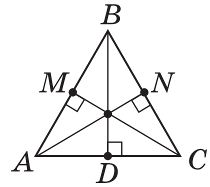
Рис. 7.93

Равносторонний (правильный) треугольник

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним**: $AB = BC = AC$.

Свойства равностороннего треугольника	**Признаки равностороннего треугольника**
 Если $AB = BC = AC$, то $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$. В равностороннем треугольнике все углы равны (по 60°)	 Если углы треугольника равны между собой (по 60°), то треугольник — равносторонний. Если $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, то $AB = BC = AC$
 Высота, медиана и биссектриса, проведенные к любой стороне равностороннего треугольника, совпадают. Если $AB = BC = AC$, то BD — высота, медиана и биссектриса	 Если в треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные к любой стороне, равны, то этот треугольник — равносторонний. Если BD — высота, медиана и биссектриса, то $AB = BC = AC$

Окончание таблицы

Свойства равностороннего треугольника	Признаки равностороннего треугольника
 В равностороннем треугольнике медианы (биссектрисы, высоты) равны между собой. Если $AB = BC = AC$, то $AN = BD = CM$	 Если три медианы (биссектрисы, высоты) треугольника равны между собой, то этот треугольник — равносторонний. Если $BD = AN = CM$, то $AB = BC = AC$

Задача 1. Высота правильного треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найти периметр треугольника (рис. 7.94).

Решение:

Рассмотрим ΔABD ($\angle ADB = 90°$). Пусть $AD = x$, тогда $AC = 2x$ и $AB = 2x$ (BD — высота и медиана).

По теореме Пифагора:

$AB^2 = AD^2 + BD^2$; $(2x)^2 = x^2 + \left(12\sqrt{3}\right)^2$; $4x^2 = x^2 + 432$; $x = 12$ $(x > 0)$. $P = 3 \cdot AB = 3 \cdot 12 = 36$ (см).

Ответ: 36 см.

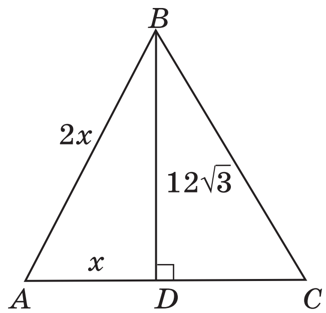


Рис. 7.94

Задача 2. В равнобедренном треугольнике угол, образованный высотой, проведенной к основанию, и биссектрисой угла при основании, равен 55°. Найти углы треугольника (рис. 7.95).

Решение:

Рассмотрим ΔAOD ($\angle ADO = 90°$), $\angle AOD = 55°$, т. к. сумма углов треугольника 180°, то $\angle OAD = 180° - (90° + 55°) = 35°$.

$\angle A = 2 \cdot \angle AOD = 70°$ (AM — биссектриса).

$\angle C = \angle A = 70°$ (углы при основании равнобедренного треугольника равны).

$\angle B = 180° - (70° + 70°) = 40°$.

Ответ: 70°, 40°, 70°.

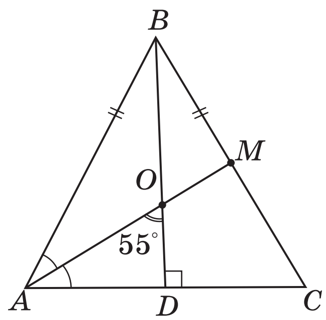


Рис. 7.95

Задача 3. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, делит ее на два отрезка 7 см и 18 см, считая от вершины, противоположной основанию. Найти площадь треугольника.

Решение:

Пусть $AB = BC$, $AD \perp BC$, $BD = 7$ см; $DC = 18$ см; $AB = BC = 25$ (см) (рис. 7.96). Рассмотрим ΔABD ($\angle ADB = 90°$). По теореме Пифагора: $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576$; $AD = 24$.

Площадь треугольника можно найти по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BD \cdot AD}{2} = \frac{24 \cdot 25}{2} = 300 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 300 см^2.

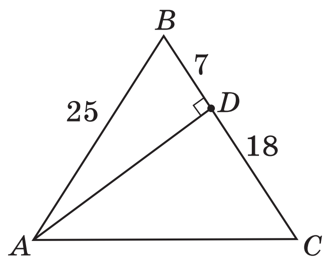


Рис. 7.96

7.2.3. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора

Прямоугольный треугольник

Треугольник называется **прямоугольным**, если у него один угол **прямой** (рис. 7.97).

Сторона, противолежащая прямому углу, называется **гипотенузой**, две другие стороны — **катетами**.

Свойства прямоугольного треугольника:

1. Сумма острых углов равна 90°: $\angle A + \angle B = 90°$.
2. Гипотенуза больше катета: $c > a$, $c > b$.
3. Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы: $a = \frac{1}{2}c$ (рис. 7.98).

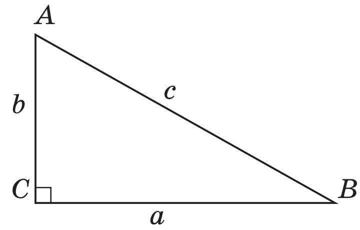


Рис. 7.97

4. Если один из острых углов 45°, то треугольник — равнобедренный прямоугольный (рис. 7.99).
5. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы и равна радиусу окружности, описанной около этого треугольника: $m_C = \frac{c}{2} = R$. (рис. 7.100).

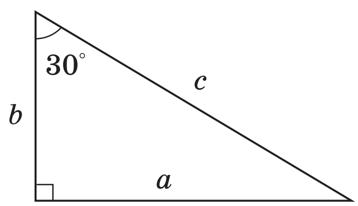


Рис. 7.98

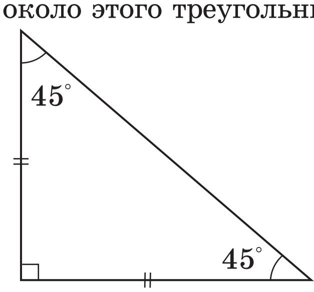


Рис. 7.99

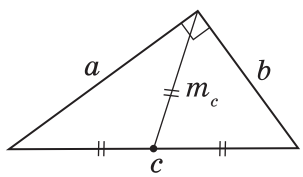


Рис. 7.100

Задача 1. Найти расстояние от точки M до прямой a, если длина наклонной, проведенной к прямой из этой точки, равна 10 см и наклонена она к прямой под углом 30°.

Решение:

Расстояние от точки до прямой — перпендикуляр, проведенный из этой точки к прямой. $BM \perp a$ (рис. 7.101). BM — искомое расстояние.

ΔAMB — прямоугольный, AM — гипотенуза, MB — катет, лежащий против угла 30°, $BM = \frac{1}{2}AM = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

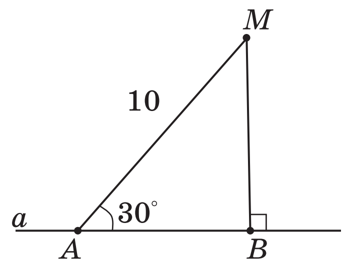


Рис. 7.101

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Обратная теорема: если в треугольнике со сторонами a, b и c выполняется соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, то угол, лежащий против стороны c, — прямой.

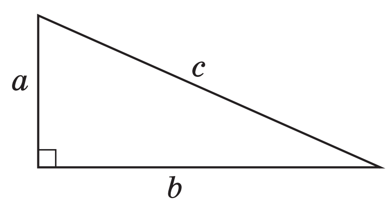


Рис. 7.102

Треугольник со сторонами 3, 4, и 5 называется **египетским**, угол между сторонами 3 и 4 — прямой, т. к. $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Из теоремы Пифагора можно получить часто встречающиеся соотношения:

1. Диагональ квадрата со стороной a: $d = a\sqrt{2}$ (рис. 7.103).
2. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника: $c = a\sqrt{2}$ (рис. 7.104).
3. Высота равностороннего треугольника: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (рис. 7.105).

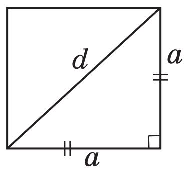


Рис. 7.103

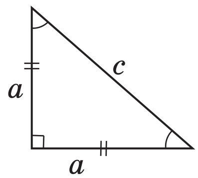


Рис. 7.104

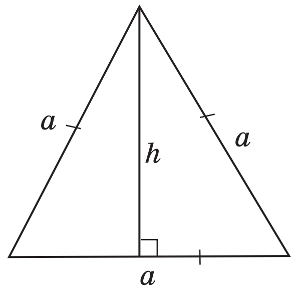


Рис. 7.105

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Пусть высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника h_c, делит гипотенузу на отрезки m и n ($m + n = c$).

m — проекция катета a на гипотенузу c;

n — проекция катета b на гипотенузу c (рис. 7.107).

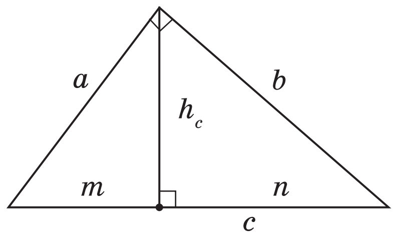


Рис. 7.106

Величины a, b, c, h_c, m и n связаны следующими соотношениями:

1. Квадрат каждого катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на нее:
$$a^2 = cm;\ b^2 = cn.$$
2. Квадрат высоты, проведенной из вершины прямого угла, равен произведению проекций катетов на гипотенузу:
$$h^2 = mn.$$
3. Произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту, проведенную к ней:
$$ah = hc.$$

Задача 2. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 15 см, а катеты относятся как 3 : 4. Найти катеты треугольника.

Решение:

Медиана $m_c = 15$ см, когда гипотенуза $c = 2m_c = 2 \cdot 15 = 30$ (см) (рис. 7.107).

Катеты $a : b = 3 : 4$. Пусть $a = 3x$, $b = 4x$, тогда гипотенуза $c = 5x$ (треугольник египетский). $5x = 30$; $x = 6$; $a = 6 \cdot 3 = 18$ (см); $b = 6 \cdot 4 = 24$ (см).

Ответ: 18 см; 24 см.

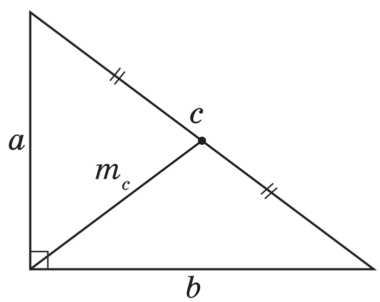


Рис. 7.107

Задача 3. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки 18 см и 32 см. Найти длину отрезков, на которые делит эту высоту биссектриса большего острого угла треугольника.

Решение:

Имеем $AD = 18$; $DB = 32$; тогда по теоремам о пропорциональных отрезках: $AC^2 = AD \cdot AB = 18 \times$ $\times (18 + 32) = 18 \cdot 50 = 900$; $AC = 30$. $CD^2 = 18 \cdot 32 =$ $= 576$; $CD = 24$; $CB^2 = 32 \cdot (18 + 32) = 1600$; $CB = 40$ (рис. 7.108).

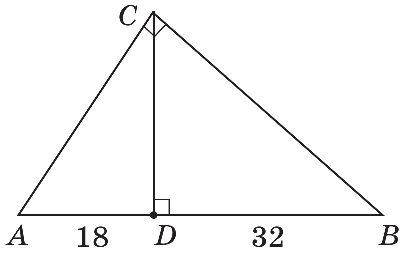


Рис. 7.108

Найдем длину отрезков, на которые делит высоту CD биссектриса, проведенная из угла A (угол A лежит против бо́льшего катета CB, значит, $\angle A > \angle B$) (рис. 7.109).

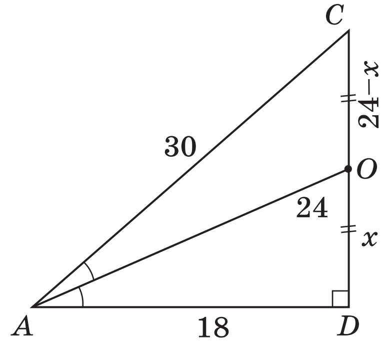


Рис. 7.109

Пусть $OD = x$, тогда $CO = 24 - x$. По свойству биссектрисы:

$$\frac{CO}{OD} = \frac{AC}{AD}; \quad \frac{24 - x}{x} = \frac{30}{18}; \quad \frac{24 - x}{x} = \frac{5}{3};$$

$$72 - 3x = 5x; \; 8x = 72; \; x = 9.$$

$$OD = 9; \; CO = 24 - 9 = 15.$$

Ответ: 9 см; 15 см.

Задача 4. К гипотенузе прямоугольного треугольника провели высоту и медиану, расстояние между основаниями которых равно 7 см. Вычислить площадь треугольника, если его медиана равна 25 см.

Решение:

ABC — прямоугольный треугольник, $\angle C = 90°$, $CD \perp AB$, CM — медиана (рис. 7.110). $DM = 7$; $CM =$ $= 25$, тогда гипотенуза вдвое больше, т. е. $AB = 50$ (см).

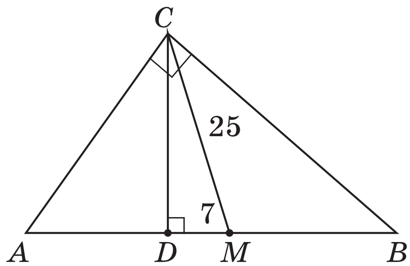


Рис. 7.110

Из ΔCDM ($\angle CDM = 90°$) по теореме Пифагора: $CD^2 = CM^2 - DM^2 = 25^2 - 7^2 = 24^2$; $CD = 24$. Тогда:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{50 \cdot 24}{2} = 600 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 600 см^2.

Задача 5. Диагональ равнобокой трапеции с основаниями 25 см и 39 см является биссектрисой острого угла. Найти высоту трапеции.

Решение:

$ABCD$ — трапеция, где $AB = CD$ (рис. 7.111). AC — биссектриса $\angle A$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 2 =$ $= \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC. Тогда $\angle 1 = \angle 3$, т. е. ΔABC — равнобедренный, т. к. углы при основании равны, т. е. $AB = BC = 25$.

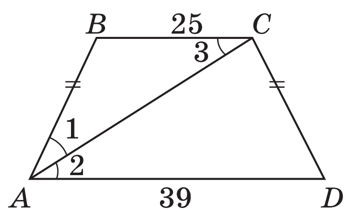


Рис. 7.111

Имеем трапецию со сторонами: $AB = BC = CD = 25$; $AD = 39$ (рис. 7.112).

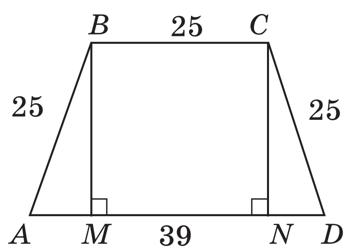


Рис. 7.112

Проведем высоту $BM \perp AD$ и $CN \perp AD$.

Очевидно, что $AM = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{39 - 25}{2} = 7.$

Из ΔABM ($\angle AMB = 90°$) по теореме Пифагора: $BM^2 = AB^2 - AM^2 = 25^2 - 7^2 = 24^2$; $BM = 24$.

Ответ: 24 см.

Задача 6. Перпендикуляр, проведенный из вершины угла прямоугольника, делит его диагональ на отрезки, разность между которыми составляет 7 см. Найти периметр и площадь прямоугольника, если длина перпендикуляра 12 см.

Решение:

$BD \perp AC$, $AD = x$, $DC = x + 7$; $BD = 12$.

Используем теоремы о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике (ΔABC — прямоугольный) (рис. 7.113).

$BD^2 = AD \cdot DC$; $x(x + 7) = 12^2$; $x^2 + 7x - 144 = 0$; $x_1 = 9$; $x_2 = -16$ (не подходит по смыслу задачи). $AD = 9$; $DC = 16$; $AC = 9 + 16 = 25$.

Тогда $AB^2 = AD \cdot AC = 9 \cdot 25$; $AB = \sqrt{9 \cdot 25} = 15$;

$$BC^2 = DC \cdot AC = 16 \cdot 25;\ BC = \sqrt{16 \cdot 25} = 20;$$

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2 \cdot (15 + 20) = 70 \text{ (см)}.$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 15 \cdot 20 = 300 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 70 см; 300 см^2.

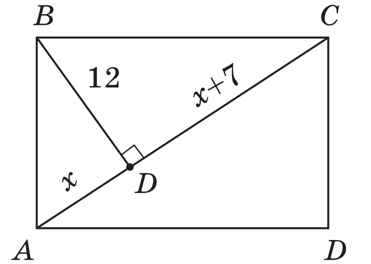


Рис. 7.113

7.2.4. Признаки равенства треугольников

Две фигуры называются **равными**, если их можно совместить наложением.

Треугольники называются **равными**, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны (рис. 7.114):

$$\Delta ABC = \Delta PQR \Leftrightarrow \angle A = \angle P;\ \angle B = \angle Q;$$
$$\angle C = \angle R;\ AB = PQ;\ AC = PR \text{ и } BC = QR.$$

Свойства равных треугольников:

1. В равных треугольниках равны все соответствующие элементы (углы, стороны, медианы, высоты и т. д.).
2. В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, а против равных сторон лежат равные углы.

Признаки равенства треугольников позволяют установить равенство треугольников без наложения их друг на друга, а сравнивая только некоторые элементы.

Первый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу между ними.

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 7.115).

Если $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Второй признак равенства треугольников — по сторонам и двум прилежащим к ней углам.

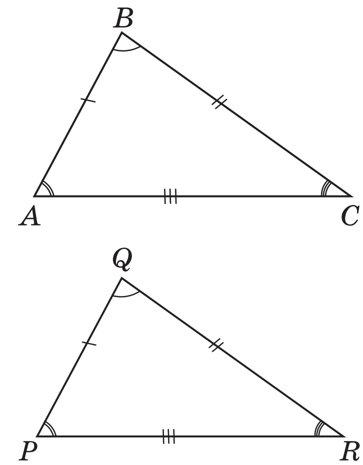


Рис. 7.114

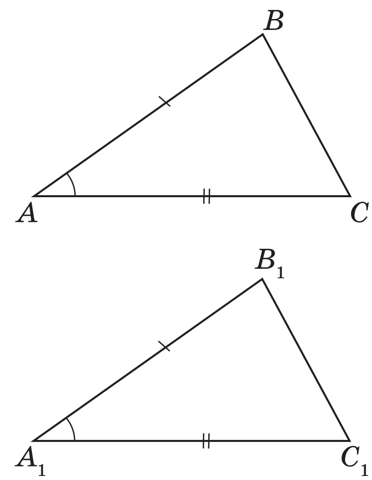


Рис. 7.115

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 7.116).

Если $AC = A_1B_1$; $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Третий признак равенства треугольника — по трем сторонам.

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 7.117).

Если $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

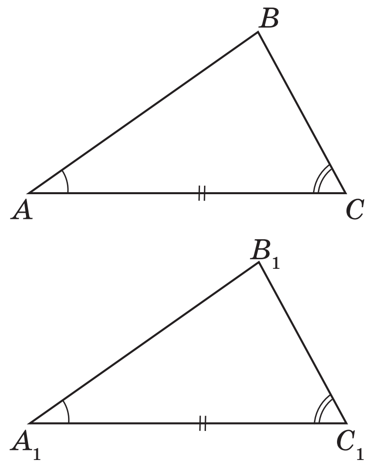


Рис. 7.116

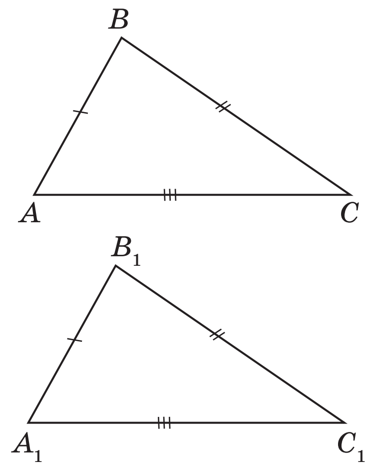


Рис. 7.117

Задача 1. *Дано*: $AB = AC$; $\angle 1 = \angle 2$; $AB = 17$ см; $CD = 6$ см. *Доказать*: $\Delta ABC = \Delta ADC$. *Найти* AD, BC.

Доказательство:

По условию $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$, сторона AC — общая $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ADC$ по первому признаку равенства треугольников (рис. 7.118).

В равных треугольниках соответственные стороны равны: $AD = AB = 17$ см; $BC = CD = 6$ см.

Ответ: 17 см; 6 см.

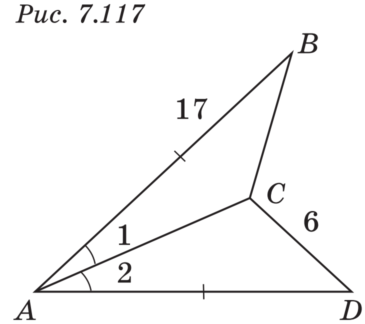


Рис. 7.118

Задача 2. *Дано*: $BC \parallel AD$; $AB \parallel CD$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta CDA$.

Доказательство:

$\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC.

$\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC.

Сторона AC — общая.

$\Delta ABC = \Delta CDA$ по второму признаку равенства треугольников (рис. 7.119).

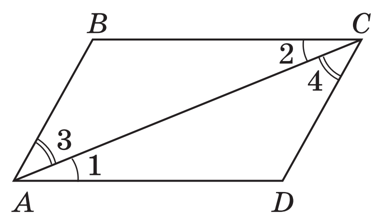


Рис. 7.119

Задача 3. *Дано*: $AC = BD$; $AD = BC$.
Доказать: $\angle BDC = \angle ACD$.

Доказательство:

$AC = BD$, $AD = BC$, DC — общая сторона $\Rightarrow \Delta DAC = \Delta CBD$ по третьему признаку равенства треугольников. В равных треугольниках соответственные углы равны, поэтому $\angle BDC = \angle ACD$ (рис. 7.120).

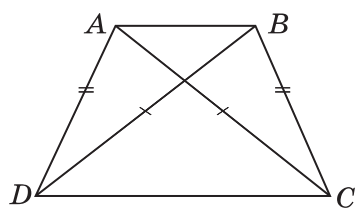


Рис. 7.120

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Чтобы доказать равенство прямоугольных треугольников, достаточно найти два отличных от угла в 90° соответственных элемента, один из которых — сторона:

1. **По двум катетам.**
   Если $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 7.121).
2. **По гипотенузе и катету.**
   Если $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 7.122).
3. **По гипотенузе и острому углу.**
   Если $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$ (или $\angle B = \angle B_1$), то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 7.123).
4. **По катету и острому углу (прилежащему или противолежащему).**
   Если $BC = B_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$ или $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 7.124).

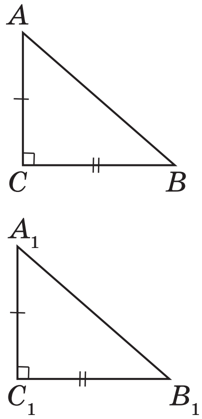


Рис. 7.121

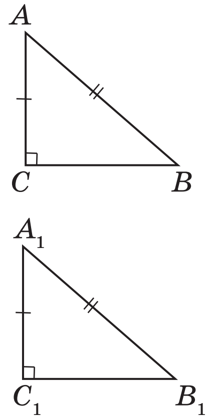


Рис. 7.122

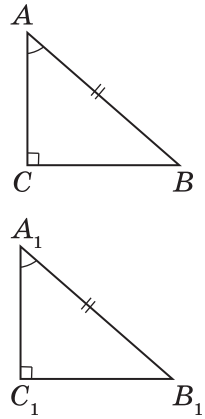


Рис. 7.123

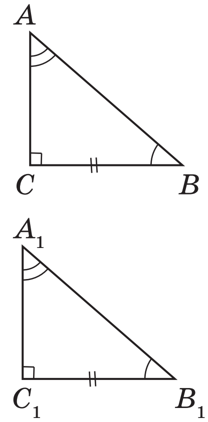


Рис. 7.124

Задача 4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1 = 90°$. BD и B_1D_1 — биссектрисы, причем $BD = B_1D_1$, $\angle B = \angle B_1$. Доказать, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABD и $\Delta A_1B_1D_1$ (рис. 7.125): $\angle A = \angle A_1 = 90°$, треугольники прямоугольные. $\angle B = \angle B_1$, но BD и B_1D_1 — биссектрисы, тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. То есть $\angle 1 = \angle 3$ и $BD = B_1D_1$.

$\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ по гипотенузе и острому углу.

В равных треугольниках соответственные стороны равны. Получим $AB = A_1B_1$ (из равенства $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$), $\angle B = \angle B_1$ (рис. 7.126).

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по катету и острому углу.

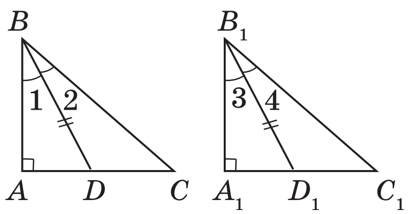


Рис. 7.125

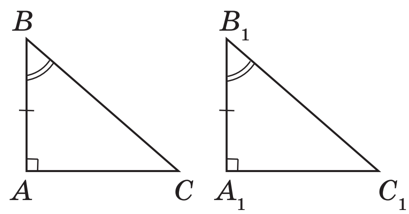


Рис. 7.126

7.2.5. Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника не превосходит сумму двух других его сторон (рис. 7.127):

$$\boxed{AB \le AC + CB}$$

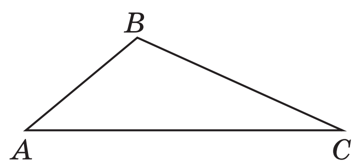


Рис. 7.127

Данное неравенство называется **неравенством треугольника.**

Следствия:

1. Равенство $AB = AC + CB$ достигается только тогда, когда треугольник вырожден (точка C лежит строго между точками A и B, точки A, B и C лежат на одной прямой).

2. Обратное неравенство треугольника $|AB - BC| \geq AC$.

Задача 1. a, b и c — стороны треугольника, c — целое число. Найти c.
а) $a = 8$; $b = 6$; $c > 12$; б) $a = 3{,}17$; $b = 0{,}75$.

Решение:

а) Из неравенства треугольника: $c < a + b$, $c < 8 + 6$, $c < 14$, но $c > 12$. Так как c — целое число, то $c = 13$.

б) Из неравенства треугольника: $c < a + b$, $c < 3{,}17 + 0{,}75$; $c < 3{,}92$. Но из обратного неравенства треугольника $c > a + b$, т. е. $c > 3{,}17 - 0{,}75$; $c > 2{,}42$. Так как c — целое число, то оно равно 3.

Ответ: а) 13; б) 3.

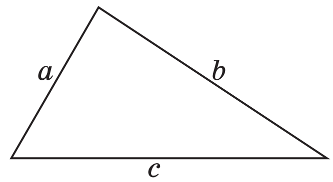


Рис. 7.128

Задача 2. Доказать, что в четырехугольнике любая сторона меньше суммы остальных.

Доказательство:

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Из неравенства треугольника $AB < AD + DB$; $BD < BC + CD$, отсюда $AB < AD + BC + CD$, что и требовалось доказать (рис. 7.129).

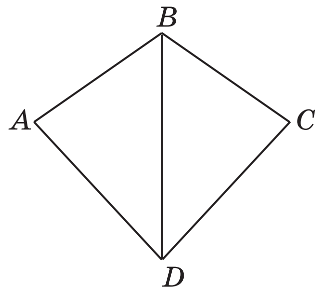


Рис. 7.129

7.2.6. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника

Теорема о сумме углов треугольника

В любом треугольнике сумма углов равна 180° (рис. 7.130):

$$\boxed{\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ}$$

Следствия:

1. Если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то и третьи углы равны.
2. У любого треугольника хотя бы два угла острые.
3. Все углы равностороннего треугольника равны 60°.
4. Если один из углов равнобедренного треугольника равен 60°, этот треугольник равносторонний.

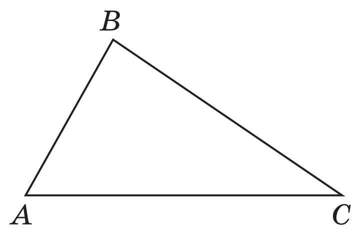


Рис. 7.130

Задача 1. Найти угол B треугольника ABC, если $\angle A = \alpha$, $\angle C = 3\alpha$.

Решение:

$\angle B = 180^\circ - (\alpha + 3\alpha) = 180^\circ - 4\alpha$ по теореме о сумме углов треугольника.

Ответ: $180^\circ - 4\alpha$.

Задача 2. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M. Найти $\angle AMB$, если $\angle A = 56^\circ$, $\angle B = 92^\circ$.

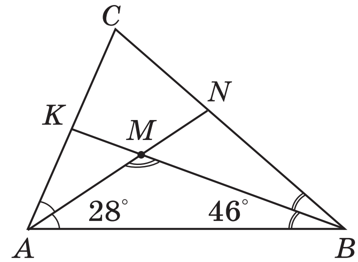


Рис. 7.131

Решение:
AN — биссектриса $\angle A$, поэтому $\angle MAB = 56 : 2 = 28°$ (рис. 7.131).
BK — биссектриса $\angle B$, поэтому $\angle MBA = 92 : 2 = 46°$.
Из ΔAMB: $\angle AMB = 180° - (28° + 46°) = 106°$.
Ответ: 106°.

Задача 3. Углы треугольника пропорциональны числам 2 : 3 : 5. Найти эти углы.

Решение:
Пусть $\angle A = 2x$, $\angle B = 3x$, $\angle C = 5x$, тогда по теореме о сумме углов треугольника (рис. 7.1323):

$$2x + 3x + 5x = 180;\ 10x = 180;\ x = 18.$$

$\angle A = 2 \cdot 18 = 36°$; $\angle B = 3 \cdot 18 = 54°$; $\angle C = 5 \cdot 18 = 90°$.
Ответ: 36°; 54°; 90°.

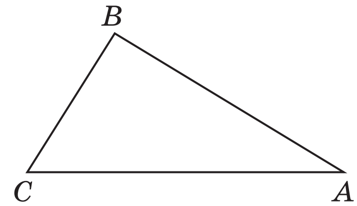


Рис. 7.132

Задача 4. Один из углов треугольника вдвое меньше второго и на 12° больше третьего. Найти эти углы.

Решение:
Пусть $\angle A = x$, тогда второй угол, т. е. $\angle B$ вдвое больше, т. е. $\angle B = 2x$, третий угол, т. е. $\angle C$ на 12° меньше, т. е. $\angle C = x - 12$ (рис. 7.133). По теореме о сумме углов треугольника:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°;\ x + 2x + x - 12 = 180;$$
$$x = 48;\ 2x = 96;\ x - 12 = 36.$$

Ответ: 48°; 96°; 36°.

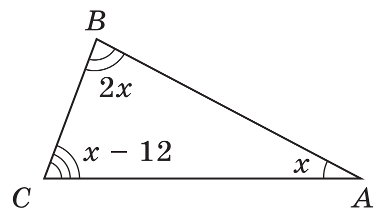


Рис. 7.133

Внешний угол треугольника

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине (рис. 7.134).

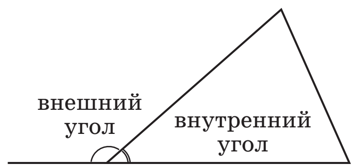


Рис. 7.134

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

$\angle 1$ — внешний при вершине C (рис. 7.135).

$$\boxed{\angle 1 = \angle A + \angle B}$$

Следствие. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним.

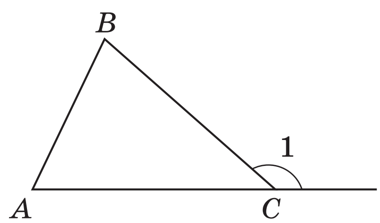


Рис. 7.135

Задача 5. Внешний угол треугольника равен 124°. Один из углов, не смежный с ним, в три раза больше второго, не смежного с ним угла. Найти углы треугольника.

Решение:
Пусть $\angle A$ и $\angle B$ — углы, не смежные с внешним углом BCD ($\angle BCD = 124°$) (рис. 7.136). Тогда по теореме о внешнем угле треугольника:

$$\angle A + \angle B = \angle BCD,\ \text{т. е. } x + 3x = 124°;$$
$$x = 31;\ 3x = 93.$$

$\angle C = 180° - 124° = 56°$ (углы C и BCD — смежные).
Ответ: 31°; 93°; 56°.

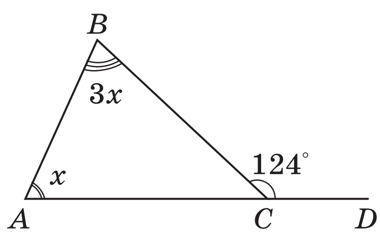


Рис. 7.136

Задача 6. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 112°. Найти углы треугольника.

Решение:

В задаче не сказано, дан ли внешний угол при вершине равнобедренного треугольника или при основании. Рассмотрим оба случая:

а) Пусть $\angle DAC = 112°$, внешний угол при вершине A, тогда $\angle B = \angle C$, т. к. треугольник равнобедренный и $\angle B + \angle C = 112°$; $\angle B = \angle C = 56°$; $\angle A = 180° - 112° = 68°$ (рис. 7.137).

б) Пусть внешний угол $\angle ACM = 112°$ — угол при одной из вершин при основании. Тогда $\angle C = 180° - 112° = 68°$; $\angle B = \angle C = 68°$ (рис. 7.138).

По теореме о внешнем угле треугольника:

$$\angle B + \angle A = \angle ACM, \text{ т. е.}$$

$$\angle A = \angle ACM - \angle B = 112° - 68° = 44°.$$

Ответ: 56°, 56° и 68° и 68°, 68° и 44°.

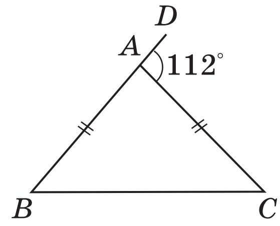


Рис. 7.137

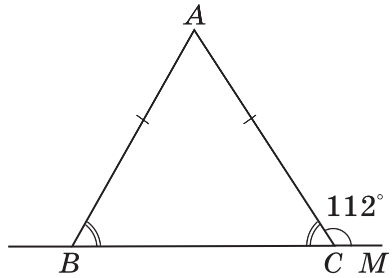


Рис. 7.138

7.2.7. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника

1. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против меньшей стороны — меньший угол. Верно и обратное утверждение: в треугольнике против большего угла лежит большая сторона (рис. 7.139).
2. В треугольнике против равных сторон лежат равные углы, и обратно: против равных углов лежат равные стороны (рис. 7.140).
3. Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны. Любая сторона треугольника больше модуля разности двух других сторон (рис. 7.141).

$$|b - c| < a < b + c$$

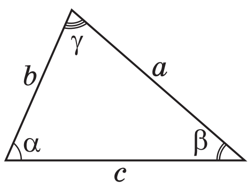


Рис. 7.139

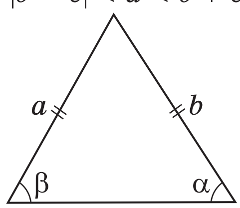


Рис. 7.140

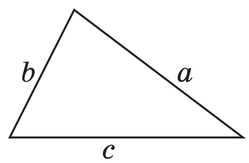


Рис. 7.141

Задача 1. Могут ли стороны треугольника быть равными:
а) 3, 6 и 7; б) 2, 3 и 9; в) 3, 4 и 7?

Решение:

а) Могут, т. к. $7 < 3 + 6$; $7 > 6 - 3$.
б) Не могут, т. к. $9 > 2 + 3$.
в) Не могут, т. к. $7 = 3 + 4$.

Задача 2. Стороны треугольника равны и такие, что $a < b < c$. Против каких сторон лежат углы этого треугольника 30° и 60°?

Решение:

Величина третьего угла этого треугольника: $180° - (30° + 60°) = 90°$, это больший угол этого треугольника.

Ответ: угол 90° лежит против стороны c; 60° — против стороны b и 30° — против стороны a.

7.2.8. Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (рис. 7.142):

Если $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, то $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

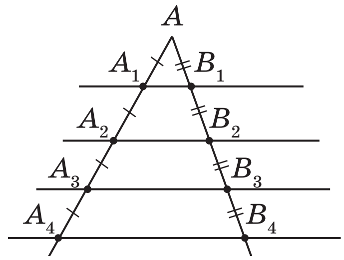


Рис. 7.142

Теорема верна и в том случае, если вместо сторон угла взять любые две прямые a и b. Если $m = n = p$ и $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, то $m_1 = n_1 = p_1$ (рис. 7.143).

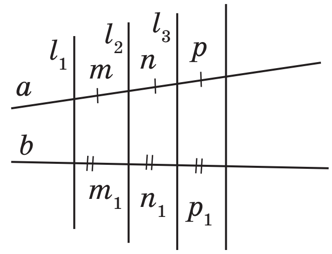


Рис. 7.143

Пропорциональные отрезки

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки (рис. 7.144):

Если $BB_1 \parallel CC_1$, то $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB_1}{AC_1}$

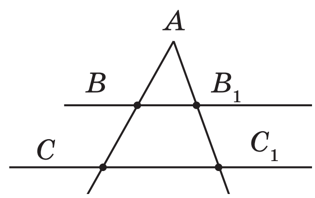


Рис. 7.144

Задача 1. Даны отрезки m, n и k. Построить отрезок $x = \dfrac{nk}{m}$.

Решение:

Даны отрезки (рис. 7.145):

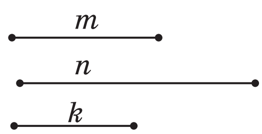


Рис. 7.145

1. Построим неразвернутый $\angle A$.
2. На одной стороне угла отложим $AB = m$ и $AC = n$.
3. На другой стороне угла отложим $AB_1 = k$.
4. Соединим точки B и B_1, получим прямую l_1.
5. Через точку C проведем прямую $l_2 \parallel l_1$, она пересекает сторону угла AB_1 в точке C_1 (рис. 7.146).

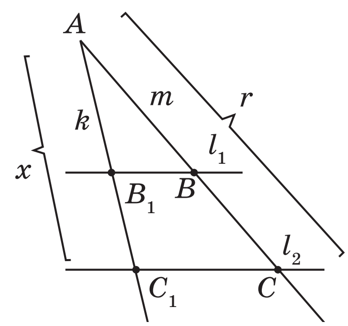


Рис. 7.146

Согласно теореме о пропорциональных отрезках:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1}, \text{ т. е. } \frac{m}{n} = \frac{k}{AC_1}; \quad AC_1 = \frac{nk}{m},$$

$$\text{т. е. } AC_1 = x \text{ и } x = \frac{nk}{m} \text{ — искомый отрезок.}$$

Такой отрезок называется **четвертым пропорциональным отрезком.**

Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 7.147).

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне, и ее длина равна половине третьей стороны:

$MN \parallel AC$ и $MN = \dfrac{1}{2}AC$

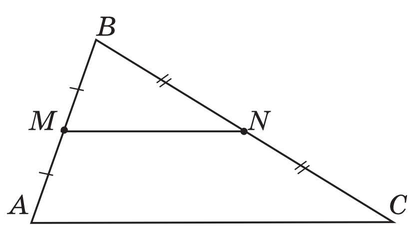


Рис. 7.147

Это утверждение называют теоремой о средней линии треугольника.

В треугольнике можно провести три средние линии. Периметр треугольника, составленного из средних линий, равен половине периметра данного треугольника (рис. 7.148):

$$P_{\Delta MNK} = \frac{1}{2} P_{\Delta ABC}.$$

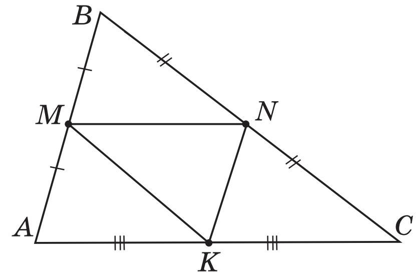


Рис. 7.148

Задача 2. Средняя линия равностороннего треугольника 2,5 см. Найти периметр этого треугольника.

Решение:

Средняя линия равностороннего треугольника $m = 2{,}5$ см. Тогда по теореме о средней линии треугольника: $m = \frac{1}{2}a$, т. е. $a = 2m = 2 \cdot 2{,}5 = 5$ (см).

$P = 3a = 3 \cdot 5 = 15$ (см) (рис. 7.149).

Ответ: 15 см.

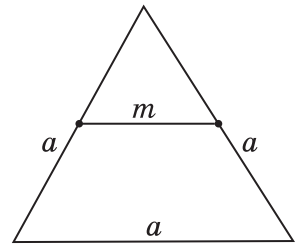


Рис. 7.149

Задача 3. Средняя линия треугольника отсекает от него трапецию с боковыми сторонами 4 и 5 см и меньшим основанием 6,5 см. Найти периметр треугольника.

Решение:

Средняя линия MN в ΔABC отсекает от него трапецию $AMNC$, где $AM = 4$ см; $NC = 5$ см; $MN = 6{,}5$ см (рис. 7.150).

Тогда по определению средней линии: $AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot 4 = 8$ (см); $BC = 2 \cdot NC = 2 \cdot 5 = 10$ (см).

По теореме о средней линии треугольника: $AC = 2 \cdot MN = 2 \cdot 6{,}5 = 13$ (см).

$$P_{\Delta ABC} = 8 + 10 + 13 = 31 \text{ (см)}.$$

Ответ: 31 см.

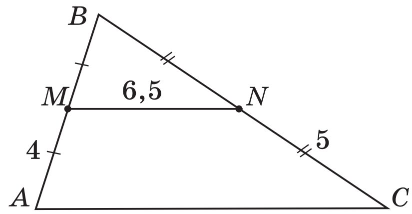


Рис. 7.150

Задача 4. Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника, проходит через середину его боковой стороны и отсекает от данного треугольника трапецию. Найти ее периметр, если периметр данного треугольника 26 см, а основание трапеции относится к боковой стороне как 5 : 4 (рис. 7.151).

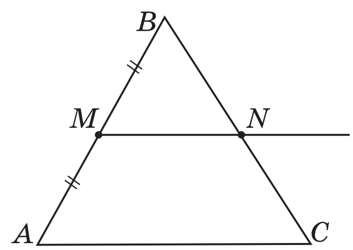


Рис. 7.151

Решение:

Пусть ΔABC такой, что $AB = BC$, $AM = MB$ и $MN \parallel AC$. Тогда по теореме Фалеса на стороне угла BC также отложились равные отрезки $BN = NC$, тогда MN — средняя линия ΔABC.

Основание AC относится к боковой стороне AB как 5 : 4. Пусть $AC = 5x$, тогда $AB = BC = 4x$. Получим уравнение:

$$5x + 4x + 4x = 26;\ 13x = 26;\ x = 2.\ AB = BC = 4 \cdot 2 = 8;\ AC = 5 \cdot 2 = 10.$$

Рассмотрим трапецию $AMNC$.

По определению средней линии треугольника: $AM = 8 : 2 = 4$ (см). $NC = 4$ см (трапеция равнобокая).

По теореме о средней линии треугольника: $MN = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$

$$P_{AMNC} = AM + MN + NC + AC = 4 + 5 + 4 + 10 = 23 \text{ (см)}.$$

Ответ: 23 см.

7.2.9. Подобие треугольников, коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников

Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется **преобразованием подобия**, если при этом преобразовании расстояния между точками изменятся в одно и то же количество раз k. Число k называется **коэффициентом подобия** (рис. 7.152).

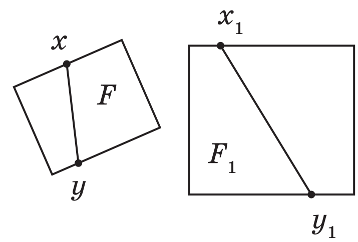


Рис. 7.152

Два треугольника подобны, если они переводятся друг в друга с помощью преобразования подобия (рис. 7.153).

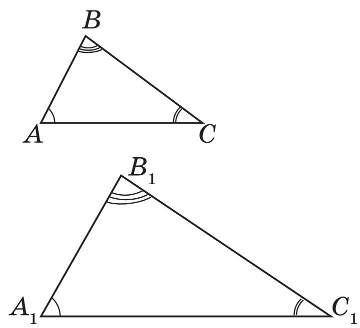


Рис. 7.153

Свойства подобных треугольников

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

1. У подобных треугольников соответственные углы равны, а соответствующие линейные элементы пропорциональны:
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{R}{R_1} = k.$$
k — коэффициент подобия, $k > 0$.
Если $k = 1$, треугольники равны.
2. Отношение периметров подобных фигур равно отношению соответственных сторон и равно коэффициенту подобия:
$$\frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k.$$
3. Отношения площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия:
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2.$$

Подобие треугольников обозначается знаком ~, например $\Delta ABC \sim \Delta MNK$.

Задача 1. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. $A_1B_1 = 4$ см; $B_1C_1 = 6$ см; $A_1C_1 = 7$ см. $\dfrac{AB}{A_1B_1} = 5$.
Найти AB, AC, BC.

Решение:

Коэффициент подобия $k = \dfrac{AB}{A_1B_1} = 5$, тогда $AB = 5 \cdot A_1B_1 = 5 \cdot 4 = 20$ (см); $BC =$
$= 5 \cdot B_1C_1 = 5 \cdot 6 = 30$ (см); $AC = A_1C_1 \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$ (см).
Ответ: 20 см, 30 см, 35 см.

Задача 2. $\Delta ABC \sim \Delta MNK$. $\angle M = 55°$, $\angle K = 65°$. Найти $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение:

По теореме о сумме углов треугольника: $\angle N = 180° - (55° + 65°) = 60°$.

У подобных треугольников соответственные углы равны, тогда: $\angle A = \angle M =$ $= 55°$, $\angle B = \angle N = 60°$, $\angle C = \angle K = 65°$.
Ответ: 55°, 60°, 65°.

Задача 3. Стороны треугольника относятся как 2 : 6 : 7. Найти стороны подобного ему треугольника, если разность наибольшей и наименьшей его сторон 35 см.

Решение:

Если треугольники подобны, то отношение их сторон сохраняется. Тогда стороны подобного треугольника $2x$, $6x$ и $7x$. Разность наибольшей и наименьшей сторон равна 35, т. е. имеем уравнение: $7x - 2x = 35$; $5x = 35$; $x = 7$.

Значит, стороны треугольника: $2 \cdot 7 = 14$ (см); $6 \cdot 7 = 42$ (см) и $7 \cdot 7 = 49$ (см).

Ответ: 14 см, 42 см и 49 см.

Признаки подобия треугольников

1. **Признак подобия по двум углам.**

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны (рис. 7.154):

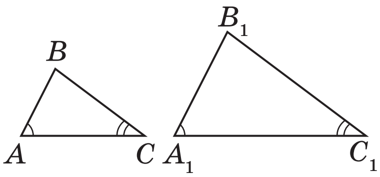


Рис. 7.154

Если $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Следствия:

1. Все равносторонние (правильные) треугольники подобны.
2. Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.
3. Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют **по одному равному** углу между соответственными сторонами.
4. При пересечении диагоналей трапеции образуются два подобных треугольника (рис. 7.155).
   $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$. $\Delta BOC \sim \Delta DOA$.

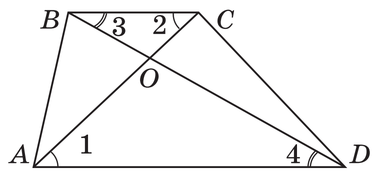


Рис. 7.155

5. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, пересекает две другие стороны и отсекает треугольник, подобный данному (рис. 7.156).
   Если $MN \parallel AC$, то $\Delta ABC \sim \Delta MBN$.

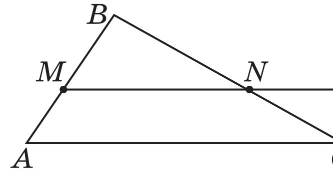


Рис. 7.156

2. **Признак подобия по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.**

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы, образованные этими сторонами, равны, то эти треугольники подобны (рис. 7.157):

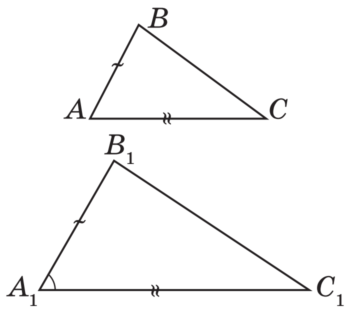


Рис. 7.157

Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

3. **Признак подобия по трем сторонам.**

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны (рис. 7.158):

Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

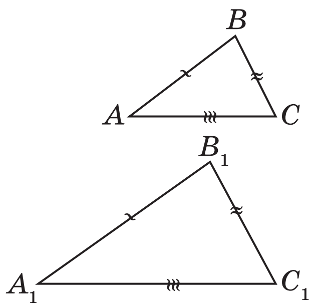


Рис. 7.158

Задача 4. Два равнобедренных треугольника имеют равные углы при основаниях. Основание одного треугольника равно 8 см, а боковая сторона — 5 см. Найти площадь второго треугольника, если его основание равно 4 см.

Решение:

Рассмотрим ΔABC. $AB = BC = 5$ см. Проведем высоту BD, она же будет являтся и медианой, поэтому $AD = DC = 4$ см (рис. 7.159).

ΔAOD — египетский, тогда $BD = 3$ (см).

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

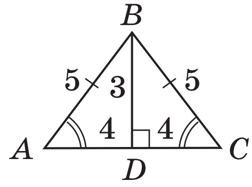


Рис. 7.159

Площади подобных фигур относятся как квадраты их соответственных сторон (рис. 7.160):

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{8}{4}\right)^2 = 4;$$

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{S_{\Delta ABC}}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ (см}^2\text{)}.$$

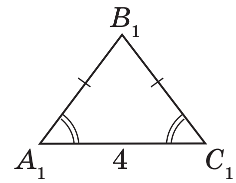
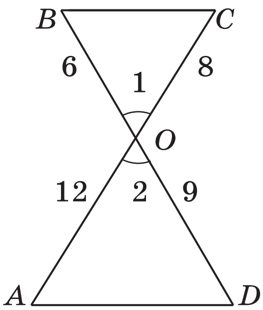


Рис. 7.160

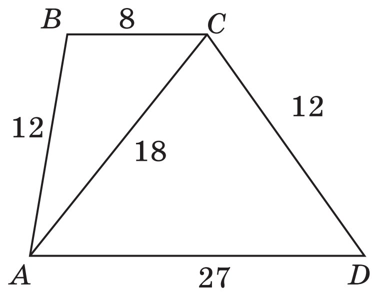
Ответ: 3 см^2.

Задача 5. На рисунках найти подобные треугольники и доказать их подобие.

а)



б)



Решение:

а) $\angle 1 = \angle 2$; $\dfrac{BO}{OC} = \dfrac{DO}{AO}$; т. е. $\dfrac{6}{8} = \dfrac{9}{12}$ $(6 \cdot 12 = 8 \cdot 9)$.

$\Delta BOC \sim \Delta DOA$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

б) $\dfrac{8}{12} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{18}{27} = k$, где $k = \dfrac{2}{3}$. Стороны пропорциональны, т. е. $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$.

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ по трем пропорциональным сторонам.

Задача 6. Диагонали трапеции делятся точкой пересечения в отношении 3 : 7. Найти основания трапеции, если средняя линия равна 40 см.

Решение:

$\Delta BOC \sim \Delta DOA$ по двум углам. Тогда соответственные стороны пропорциональны (рис. 7.161).

Пусть $BO : OD = 3 : 7$, тогда $BC : AD = 3 : 7$, $BC = 3x$, $AD = 7x$.

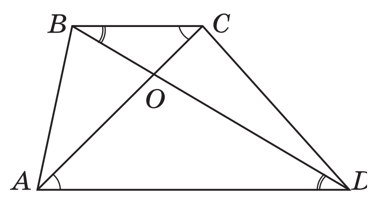


Рис. 7.161

По теореме о средней линии трапеции: $\dfrac{BC + AD}{2} =$ $=$ средней линии; $\dfrac{3x + 7x}{2} = 40$; $5x = 40$; $x = 8$. $BC =$ $= 8 \cdot 3 = 24$ (см); $AD = 8 \cdot 7 = 56$ (см).

Ответ: 24 см и 56 см.

Признаки подобия прямоугольных треугольников

1. **По острому углу** (рис. 7.162):

$$\boxed{\text{Если } \angle A = \angle A_1, \text{ то } \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1}$$

2. **По двум пропорциональным катетам** (рис. 7.163):

$$\boxed{\text{Если } \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}, \text{ то } \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1}$$

3. **По пропорциональным катету и гипотенузе** (рис. 7.164):

$$\boxed{\text{Если } \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1C_1}, \text{ то } \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1}$$

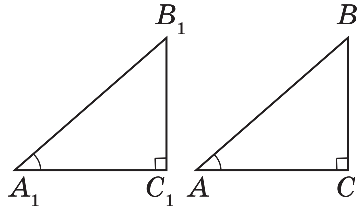


Рис. 7.162

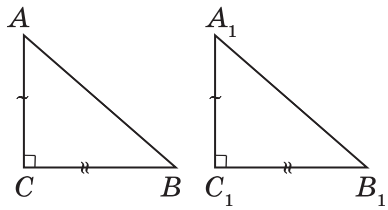


Рис. 7.163

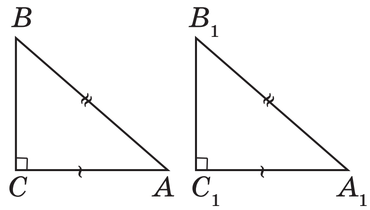


Рис. 7.164

Следствие. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит его на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному (рис. 7.165):

$$\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC.$$

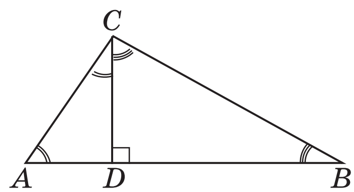


Рис. 7.165

Задача 7. Наблюдатель, который находится в точке A, видит конец шеста B и верхнюю точку башни D, причем точки A, B и D лежат на одной прямой. Найти высоту башни, если $BC = 4$ м, $AC = 6$ м, $AE = 90$ м (рис. 7.166).

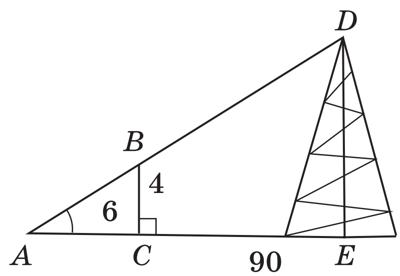


Рис. 7.166

Решение:

Очевидно, что $BC \perp AE$ и $DE \perp AE$, прямоугольные треугольники ABC и ADE подобны по острому углу A (общий угол).

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE, \text{ тогда } \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE};$$

$$DE = \frac{BC \cdot AE}{AC} = \frac{4 \cdot 90}{6} = 60 \text{ (м)}.$$

Ответ: 60 м.

Задача 8. Две окружности радиусами 4 см и 6 см внешне касаются. Их общая касательная, которая не проходит через точку пересечения окружностей, пересекает линию центров в точке A. Найти расстояние от точки A до центров окружности (рис. 7.167).

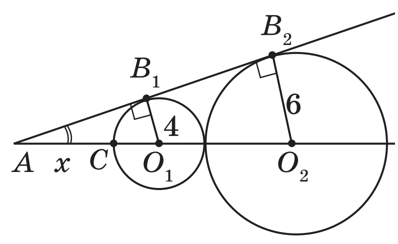


Рис. 7.167

Решение:

Пусть окружность с центром в точке O_1 имеет радиус $O_1B_1 = 4$, окружность с центром в точке O_2 — радиус $O_2B_2 = 6$. B_1B_2 — общая касательная. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, т. е. $O_1B_1 \perp B_1B_2$ и $O_2B_2 \perp B_1B_2$, тогда ΔAB_1O_1 и ΔAB_2O_2 — прямоугольные, $\Delta AB_1O_1 \sim \Delta AB_2O_2$ (по острому углу $\angle A$).

Пусть $AC = x$, тогда $AO_1 = x + 4$; $AO_2 = x + 8 + 6 = x + 14$.

$$\frac{AO_1}{O_1B_1} = \frac{AO_2}{O_2B_2};\ \frac{x+4}{4} = \frac{x+14}{6};\ 6(x + 4) = 4(x + 14);\ 3(x + 4) = 2(x + 14);$$

$$3x + 12 = 2x + 28;\ x = 16.\ AO_1 = 16 + 4 = 20;\ AO_2 = 16 + 14 = 30.$$

Ответ: 20 см и 30 см.

7.2.10. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180°

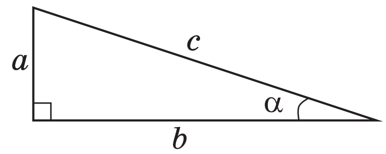


Рис. 7.168

Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой c и катетами a и b (рис. 7.168).

Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

Тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}}$$

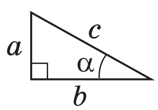
Котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}}$$

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника

1. Синус, косинус, тангенс и котангенс зависят только от **градусной меры угла** и не зависят от размеров и расположения треугольника.
2. Для любого острого угла: $\cos\alpha < 1$ и $\sin\alpha < 1$, поскольку $a < c$ и $b < c$.

Из теоремы Пифагора и определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса получаем соотношения:

 a — противолежащий катет; b — прилежащий катет		
Нахождение гипотенузы	**Нахождение катета**	
$c^2 = a^2 + b^2$ $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$	$a^2 = c^2 - b^2$ $a = c\sin\alpha$ $a = \dfrac{b}{\operatorname{ctg}\alpha} = b\operatorname{tg}\alpha$	$b^2 = c^2 - a^2$ $b = c\cos\alpha$ $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = a\operatorname{ctg}\alpha$

Значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

Функция \ Угол α	**30°**	**45°**	**60°**	**120°**	**135°**	**150°**
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Основные тригонометрические тождества

Для прямоугольного треугольника с гипотенузой c и катетами a и b и острым углом α (рис. 7.169) справедливо:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}; \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \quad \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \quad \mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

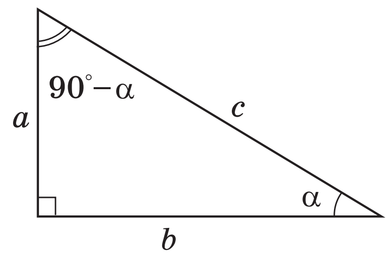


Рис. 7.169

Например, $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}\ 20^\circ = \mathrm{ctg}\ 70^\circ$; $\mathrm{tg}\ 35^\circ = \mathrm{ctg}\ 55^\circ$; $\mathrm{tg}\ 45^\circ = \mathrm{ctg}\ 45^\circ = 1$.

Для углов от 0° до 180° справедливо:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Например,

$$\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}; \quad \mathrm{tg}\,150^\circ = -\mathrm{tg}\,30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Поэтому:

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$	$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

Кроме того:

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$
$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$

Задача 1. Одна из диагоналей ромба в $\sqrt{3}$ раз больше другой. Найти углы ромба.

Решение:

Пусть диагональ $BD = 2a$, тогда большая диагональ $AC = 2a\sqrt{3}$ (рис. 7.170).

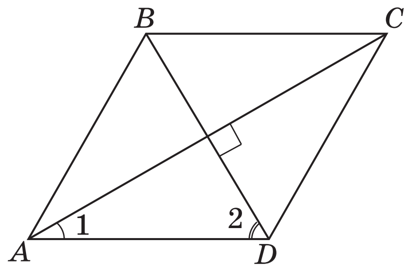


Рис. 7.170

Рассмотрим ΔAOD: $AO = a\sqrt{3}$; $OD = a$; $\angle AOD = 90°$ (свойство ромба).

$$\operatorname{tg}\angle 1 = \frac{OD}{OA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \ \angle 1 = 30°,$$

тогда $\angle A = 60°$.

$\angle B = 180° - 60° = 120°$ (свойство ромба).

Ответ: 60° и 120°.

Задача 2. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $0 < \alpha < 90°$. Найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение:

1) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$;

$\cos\alpha = \frac{12}{13}$, т. к. $0° < \alpha < 90°$, $\cos\alpha > 0$.

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5\cdot 13}{13\cdot 12} = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$.

Ответ: $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$.

Задача 3. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$; $90° < \alpha < 180°$. Найти $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

Решение:

1) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$;

2) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, тогда $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{16}{9}} = \frac{9}{25}$;

$90° < \alpha < 180°$, т. е. $\cos\alpha < 0$ и $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$; $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Задача 4. Существует ли прямоугольный треугольник, в котором:

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 1,5$;

г) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{7}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{3}$?

Решение:

Проверим соотношение $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, которое должно выполняться в любом прямоугольном треугольнике.

а) $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \neq 1$, т. к. $\dfrac{73}{144} \neq 1$. Нет.

б) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$; $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = 1$, т. е. $\dfrac{15}{16} + \dfrac{1}{16} = 1$. Да.

Для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ должно выполняться соотношение $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

в) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}5$; $\dfrac{2}{3} \cdot 1{,}5 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{15}{10} = 1$. Да.

г) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{7}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{7}{3}$; $\dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{7}{3} = \dfrac{2}{3} \neq 1$. Нет.

Задача 5. Острый угол прямоугольного треугольника равен β, а гипотенуза равна c. Найти периметр треугольника.

Решение:

$\sin\beta = \dfrac{a}{c}$, поэтому $a = c\sin\beta$; $\cos\beta = \dfrac{b}{c}$, поэтому $b = c\cos\beta$ (рис. 7.171).

$P = c + c\sin\beta + c\cos\beta = c(1 + \sin\beta + \cos\beta)$.

Ответ: $c(1 + \sin\beta + \cos\beta)$.

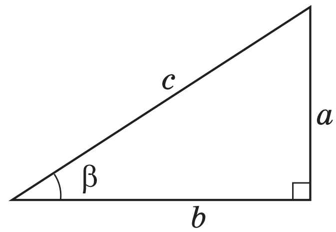


Рис. 7.171

Задача 6. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α, высота, опущенная на боковую сторону, — h. Найти периметр треугольника. Вычислить периметр при $\alpha = 45°$ и $h = 8\sqrt{2}$ см.

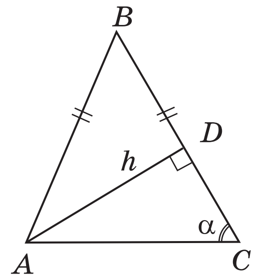


Рис. 7.172

Решение:

1) Рассмотрим ΔADC ($\angle ADC = 90°$, т. к. AD — высота) (рис. 7.172).

$$\sin\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{h}{AC}, \text{ тогда } AC = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

2) Рассмотрим ΔABK ($BK \perp AC$) (рис. 7.173). $AK = KC = \dfrac{h}{2\sin\alpha}$, т. к. BK — высота и медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию.

$$\cos\alpha = \frac{AK}{AB};\quad AB = \frac{AK}{\cos\alpha} = \frac{h}{2\cos\alpha\sin\alpha};$$

$$BC = AB = \frac{h}{2\cos\alpha\sin\alpha}.$$

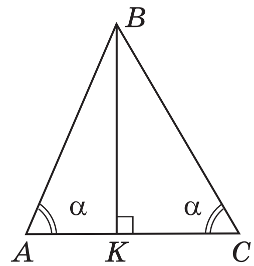


Рис. 7.173

Найдем периметр:

$$P = \frac{h}{\sin\alpha} + \frac{h}{2\cos\alpha\sin\alpha} + \frac{h}{2\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{h\cos\alpha + h}{2\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{h(\cos\alpha + 1)}{2\cos\alpha\sin\alpha}.$$

При $h = 8\sqrt{2}$; $\alpha = 45°$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$P = \frac{h(\cos\alpha + 1)}{2\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{8\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \left(8 + 8\sqrt{2}\right) \text{ (см)}.$$

Ответ: $8 + 8\sqrt{2}$ см.

7.2.11. Решение прямоугольных треугольников. Теорема синусов и теорема косинусов

Решить прямоугольный треугольник означает по данным элементам треугольника найти остальные его элементы, т. е. стороны и углы.

Пусть дан прямоугольный треугольник с гипотенузой c, острым углом α и противолежащим ему катетом a, острым углом β и противолежащим ему катетом b (рис. 7.175).

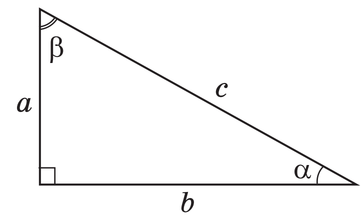


Рис. 7.174

Задача в общем виде	Пример
Дано: гипотенуза c, острый угол α. *Найти*: катеты a и b, острый угол β. *Решение*: 1. $\beta = 90° - \alpha$; 2. $a = c \sin \alpha$; 3. $b = c \cos \alpha$	*Дано*: $c = 2$, $\alpha = 20°$. *Найти*: β, a, b. *Решение*: $\beta = 90° - 20° = 70°$; $a = c \sin 20° \approx 2 \cdot 0{,}3420 \approx 0{,}68$; $b = c \cos 20° \approx 2 \cdot 0{,}9397 \approx 1{,}88$. $\sin 20°$ и $\cos 20°$ находим по таблице Брадиса или с помощью калькулятора. *Ответ*: 70°; 0,68; 1,88.
Дано: катеты a и b. *Найти*: гипотенузу c и острые углы α и β. *Решение*: 1. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a}{b}$. Угол α находим по таблице Брадиса или с помощью калькулятора. 2. $\beta = 90° - \alpha$. 3. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ или $c = \dfrac{a}{\sin \alpha}$	*Дано*: $a = 11$, $b = 60$. *Найти*: c, α, β. *Решение*: 1) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{11}{60} \approx 0{,}1833$. По таблице Брадиса $\alpha \approx 10°$. 2) $\beta = 90° - 10° = 80°$. 3) $c^2 = a^2 + b^2 = 121 + 3\,600 = 3\,721$; $c = 61$. *Ответ*: 10°, 80°, 61.
Дано: катет a и гипотенуза c. *Найти*: катет b, острые углы α и β. *Решение*: 1. $b^2 = c^2 - a^2$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. 2. $\sin \alpha = \dfrac{a}{c}$. Угол α находим по таблице Брадиса или с помощью калькулятора. 3. $\beta = 90° - \alpha$	*Дано*: $a = 84$; $c = 85$ *Найти*: b, α, β. *Решение*: 1) $b^2 = c^2 - a^2 = 85^2 - 84^2 =$ $= 7\,225 - 7\,056 = 169$; $b = 13$. 2) $\sin \alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{84}{85} \approx 0{,}9882$; $\alpha \approx 81°$. 3) $\beta = 90° - 81° = 9°$. *Ответ*: 12, 81°, 9°.
Дано: катет a и противолежащий угол α. *Найти*: гипотенузу c, катет b, второй острый угол β.	*Дано*: $a = 9$; $\alpha = 68°$ *Найти*: β, c и b. *Решение*: 1) $\beta = 90° - 68° = 22°$.

Окончание таблицы

Задача в общем виде	Пример
Решение: 1. $\beta = 90° - \alpha$. 2. $b = a\ \mathrm{tg}\ \beta$. 3. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ или $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$	2) $c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{9}{\sin 68°} \approx \dfrac{9}{0,9272} \approx 9,71.$ 3) $b = a\ \mathrm{tg}\ 22° \approx 9 \cdot 0,4040 \approx 3,64$. *Ответ*: 22°; 3,64; 9,71.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c, острый угол α. Найти катеты, их проекции на гипотенузу, высоту, опущенную на гипотенузу. Вычислить эти значения при $c = 10$, $\alpha = 60°$.

Решение:

1. $a = c \sin\alpha$; $b = c \cos\alpha$; $m = a \sin\alpha = c \sin^2\alpha$; $n = b \cos\alpha = c \cos^2\alpha$; $h = \sqrt{m \cdot n} = c \sin\alpha \cos\alpha$. При $c = 10$, $\alpha = 60°$ получим:

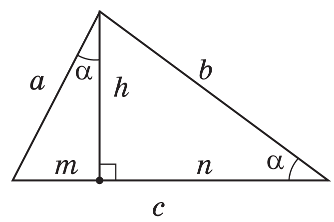


Рис. 7.175

1) $a = 10 \cdot \sin 60° = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3};$

$b = 10 \cdot \cos 60° = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5.$

2) $m = c \sin^2\alpha = 10 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 10 \cdot \dfrac{3}{4} = 7,5.$

3) $n = c \cos^2\alpha = 10 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \dfrac{1}{4} = 2,5.$

4) $h = \sqrt{7,5 \cdot 2,5} = \sqrt{18,75} = 2,5\sqrt{3}.$

Ответ: $a = 5\sqrt{3}$; $b = 5$; $m = 7,5$; $n = 2,5$; $h = 2,5\sqrt{3}$.

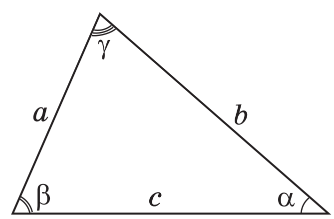


Рис. 7.176

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (рис. 7.176):

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

Полная формулировка:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b и c (рис. 7.177).

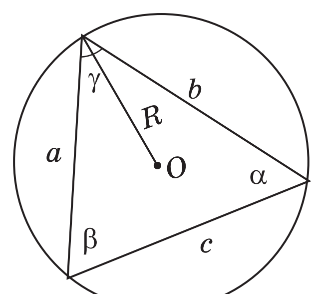


Рис. 7.177

Задача 2. Дан произвольный треугольник, $a = 10$; $\beta = 30°$; $\gamma = 45°$ (рис. 7.178). *Найти* α, b и c.

Решение:

1) $\alpha = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

2) По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$;

$b = \dfrac{a \sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{10 \cdot \sin 30°}{\sin 105°} \approx \dfrac{10 \cdot 0,5}{0,966} \approx 5,2.$

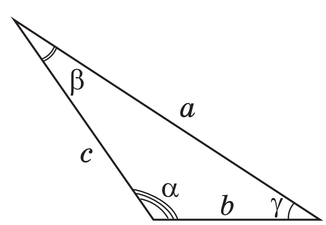


Рис. 7.178

3) По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$; $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{10\cdot\sin 45°}{\sin 105°} = \dfrac{10\cdot 0,707}{0,966} \approx 7,3.$

Ответ: $\alpha = 105°$; $b = 5,2$; $c = 7,3$.

Задача 3. Равнобедренный треугольник с основанием $10\sqrt{2}$ см и углом при основании $67°30'$ вписан в окружность. Найти радиус этой окружности (рис. 7.179).

Решение:

По теореме синусов $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, где a — некоторая сторона треугольника, α — угол, лежащий против этой стороны. Для данного треугольника

$R = \dfrac{AC}{2\sin\angle B}$. $\angle B = 180° - (67°30' + 67°30') = 45°$.

$$R = \frac{10\sqrt{2}}{2\cdot\sin 45°} = \frac{10\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10.$$

Ответ: 10 см.

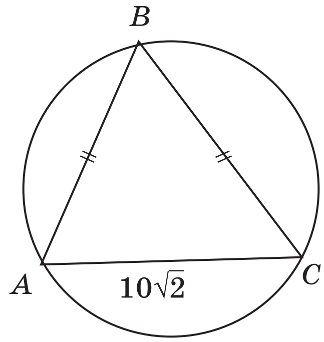


Рис. 7.179

Теорема косинусов

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (рис. 7.180):

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

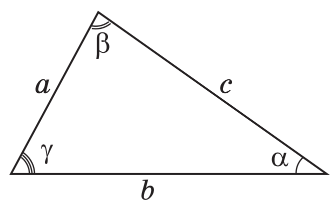


Рис. 7.180

Примечание. Очевидно, что при $\gamma = 90°$ получим:

$c^2 = a^2 + b^2$, т. к. $\cos 90° = 0$.

То есть теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов. Поэтому теорему Пифагора еще называют обобщенной теоремой косинусов.

Следствия:

1. Косинус угла можно вычислить по формуле:
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$
2. Теорема косинусов позволяет определить вид треугольника.
Если в треугольнике со сторонами a, b и c $a^2 + b^2 > c^2$, то угол, лежащий против стороны c, — острый (рис. 7.181).
Если $a^2 + b^2 < c^2$, то γ — тупой угол, треугольник тупоугольный (рис. 7.182).
Если $a^2 + b^2 = c^2$, то угол $\gamma = 90°$, треугольник прямоугольный (рис. 7.183).
3. Если a, b и c — стороны треугольника, то медиана, проведенная к стороне c (рис. 7.184), равна:
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

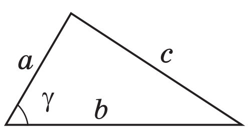


Рис. 7.181

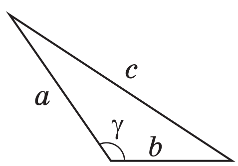


Рис. 7.182

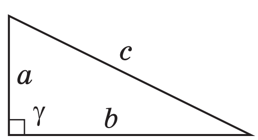


Рис. 7.183

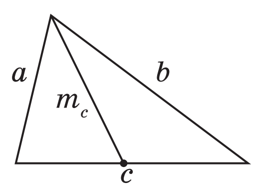


Рис. 7.184

Задача 4. Стороны треугольника равны 8 см и 13 см, угол, противолежащий большей из этих сторон, равен 120°. Найти периметр треугольника.

Решение:

Пусть сторона $a = 8$ см, $c = 13$ см, $\gamma = 120°$. Обозначим $b = x$ (рис. 7.185).

По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$.

Учитывая, что $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, получим:

$$8^2 + x^2 - 2\cdot 8\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 13^2;\ x^2 + 8x - 105 = 0.$$

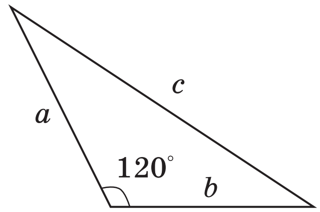


Рис. 7.185

Корни этого уравнения: $x_1 = 15$; $x_2 = -7$ (не подходит по смыслу).

Таким образом, $b = 15$.

$$P = 8 + 13 + 15 = 36 \text{ (см)}.$$

Ответ: 36 см.

Задача 5. Стороны треугольника 10 см, 5 см и $5\sqrt{3}$ см. Найти угол, лежащий против стороны 5 см.

Решение:

Пусть $c = 5$; $a = 10$; $b = 5\sqrt{3}$. Найдем угол, лежащий против стороны c, т. е. γ (рис. 7.186):

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{10^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 - 5^2}{2\cdot 10\cdot 5\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{100 + 75 - 25}{100\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \gamma = 30°.$$

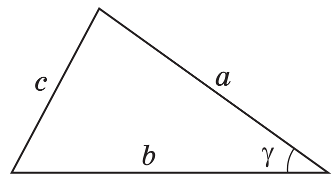


Рис. 7.186

Ответ: 30°.

Задача 6. Биссектриса тупого угла параллелограмма, который равен 120°, делит его сторону на отрезки 15 см и 10 см, считая от вершины острого угла. Найти эту биссектрису и большую диагональ параллелограмма.

Решение:

$\angle 1 = \angle 2$, т. к. BK — биссектриса, $\angle 2 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и BK — секущей (рис. 7.187).

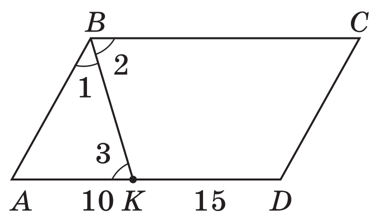


Рис. 7.187

Тогда $\angle 1 = \angle 3 = 60°$. ΔABK — равнобедренный, но $\angle 1 = \angle 3 = 60°$, тогда он равносторонний. $AB = BK = AK = 15$ см (рис. 7.188).

Имеем параллелограмм со сторонами 15 см и 25 см и углом между ними 120° $\left(\cos 120° = -\frac{1}{2}\right)$.

По теореме косинусов:

$$AC^2 = 15^2 + 25^2 - 2\cdot 15\cdot 25\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 225 + 625 + 375 = 1225;\ AC = 35.$$

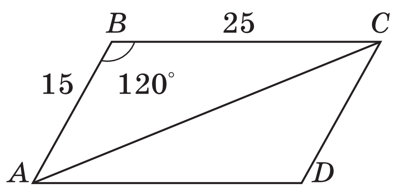


Рис. 7.188

Ответ: биссектриса имеет длину 15 см, большая диагональ — 35 см.

7.3. Многоугольники

7.3.1. Параллелограмм, его свойства и признаки

Четырехугольник

Четырехугольником называется геометрическая фигура, состоящая из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. AB, BC, CD и AD — стороны четырехугольника. A, B, C и D — вершины (рис. 7.189).

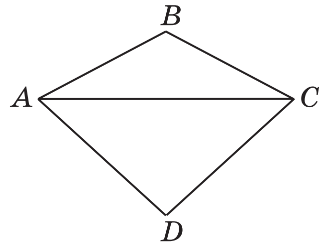


Рис. 7.189

Соседние стороны выходят из одной вершины, например BA и BC.

Противоположные стороны не имеют общих точек, например BC и AD.

Соседние вершины — концы одной из сторон, например A и D.

Противоположные вершины — это вершины, не являющиеся соседними: A и C или B и D.

Диагональ четырехугольника — отрезок, соединяющий противоположные вершины. Четырехугольник имеет две диагонали: AC и BD.

Периметр четырехугольника (сумма всех его сторон): $P = AB + BC + CD + AD$.

Сумма всех углов четырехугольника равна 360°.

Параллелограмм

Параллелограмм — это четырехугольник, стороны которого попарно параллельны (рис. 7.190):

$$AB \parallel CD \text{ и } AD \parallel BC.$$

AC и BD — диагонали параллелограмма.

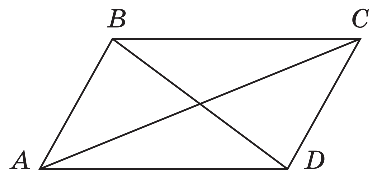
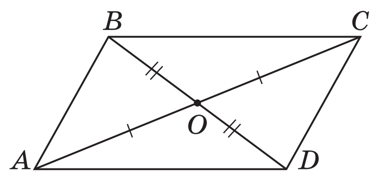
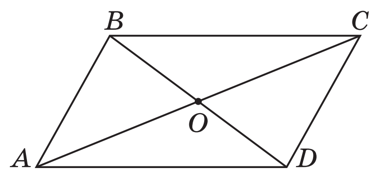
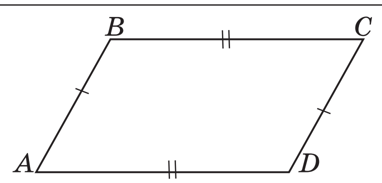
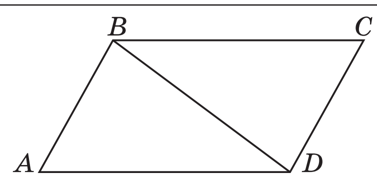
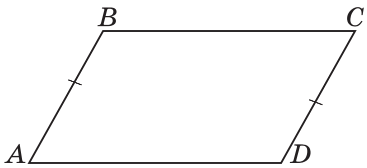
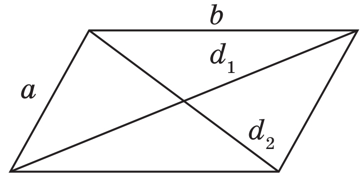
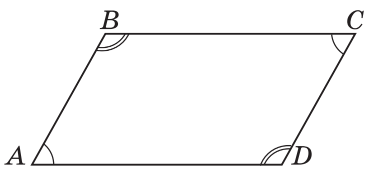
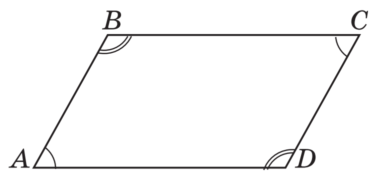


Рис. 7.190

Признаки параллелограмма	Свойства параллелограмма
 Если $BO = OD$, $AO = OC$, то $ABCD$ — параллелограмм. Если диагонали четырехугольника **точкой пересечения делятся пополам,** то этот четырехугольник — параллелограмм	 Если $ABCD$ — параллелограмм, то $BO = OD$ и $AO = OC$. Диагонали параллелограма точкой пересечения делятся пополам. Точка O — центр симметрии параллелограмма
 Если $AB = CD$, $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм. Если диагонали	 Если $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$ и $AD = BC$. Диагональ делит

Окончание таблицы

Признаки параллелограмма	Свойства параллелограмма
четырехугольника **попарно равны**, то этот четырехугольник — параллелограмм	параллелограмм на два равных треугольника, противоположные стороны параллелограмма равны
 Если в четырехугольнике две противоположные **стороны равны и параллельны**, то этот четырехугольник — параллелограмм. Если $AB = CD$, $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм	 Связь между сторонами и диагоналями параллелограмма **Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон:** $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$
 Если **противоположные углы четырехугольника равны**, то этот четырехугольник — параллелограмм. Если $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$, то $ABCD$ — параллелограмм	 Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. $\angle A + \angle B = 180°$. В параллелограмме противоположные углы равны. Сумма углов, прилегающих к одной стороне, равна 180°

Параллелограмм Вариньона

Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Такой параллелограмм называется **параллелограммом Вариньона** (рис. 7.191).

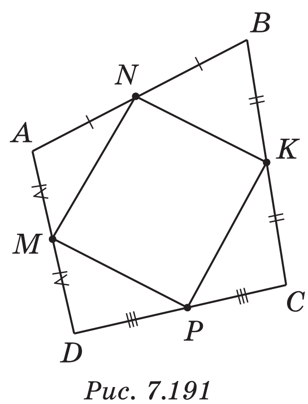


Рис. 7.191

Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник. M, N, K и P — середины сторон AD, AB, BC и CD соответственно. Рассмотрим ΔABD (BD — диагональ четырехугольника). MN — средняя линия, по теореме о средней линии $MN \parallel DB$ и $MN = \frac{1}{2}BD$.

Аналогично KP — средняя линия ΔDBC.

$$KP \parallel AD \text{ и } KP = \frac{1}{2}BD.$$

По признаку параллельности прямых $MN \parallel KP$, но $MN = \frac{1}{2}BD = KP$.

По признаку параллелограмма $MNKP$ — параллелограмм.

Задача 1. Найти углы параллелограмма, если сумма двух его углов 156° (рис. 7.192).

Решение:

Сумма двух углов, прилежащих к одной стороне — 180°, значит, это не могут быть соседние углы, а только противоположные, и они равны.

$\angle A + \angle C = 156°$, тогда $\angle A = \angle C = 156 : 2 = 78°$;

$\angle B = \angle D = 180° - 78° = 102°$.

Ответ: 78°, 102°, 78°, 102°.

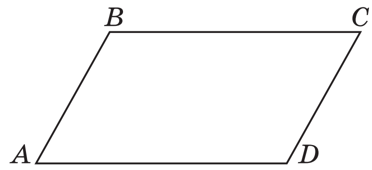


Рис. 7.192

Задача 2. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону на отрезки 15 см и 10 см. Найти периметр параллелограмма.

Решение:

Задача имеет два решения. Пусть BK — биссектриса, которая делит сторону AD на отрезки $AK = 15$ см, $KD = 10$ см (рис. 7.193).

1) $\angle 1 = \angle 2$ (BK — биссектриса), но $\angle 2 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BK. Тогда $\angle 1 = \angle 3$, ΔABK — равнобедренный и $AB = 15$ см, $AD = 25$ см.

$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2 \cdot (15 + 25) = 80$ (см).

2) Возможна ситуация, когда $AK = 10$ см, $KD = 15$ см. Тогда ΔABK — равнобедренный и $AB = 10$ см (рис. 7.194).

$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2 \cdot (10 + 25) = 70$ (см).

Ответ: 70 см или 80 см.

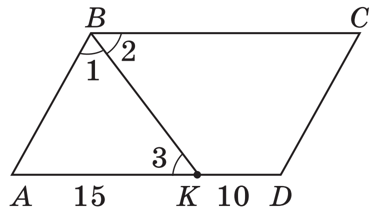


Рис. 7.193

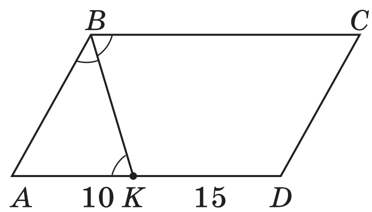


Рис. 7.194

Задача 3. Стороны параллелограмма равны 7 см и 11 см, а диагонали относятся как 6 : 7. Найти диагонали параллелограмма.

Решение:

Пусть в параллелограмме стороны равны $a = 7$ см, $b = 11$ см, диагонали — $d_2 : d_1 = 6 : 7$. Тогда $d_2 = 6x$, $d_1 = 7x$. Используем свойство: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон (рис. 7.195).

$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$; $d_2 : d_1 = 6 : 7$. Пусть $d_2 = 6x$, $d_1 = 7x$; $(6x)^2 + (7x)^2 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 11^2$; $85x^2 = 340$; $x^2 = 4$; $x = 2$. $d_1 = 6 \cdot 2 = 12$; $d_2 = 7 \cdot 2 = 14$.

Ответ: 12 см; 14 см.

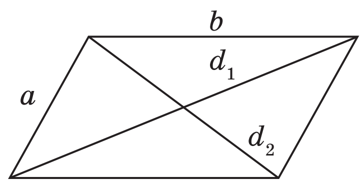


Рис. 7.195

Задача 4. Перпендикуляр, проведенный из вершины угла параллелограмма к его диагонали, делит ее на отрезки 18 см и 6 см. Найти диагонали параллелограмма, если сумма сторон параллелограмма равна 48 см.

Решение:

Пусть $AK \perp BD$. $BK = 6$ см; $KD = 18$ см. Сумма сторон параллелограмма — 48 см, тогда $AB + AD = 24$. Пусть $AB = x$, $AD = 24 - x$. Найдем катет AK дважды из ΔABK и ΔAKD (рис. 7.196):

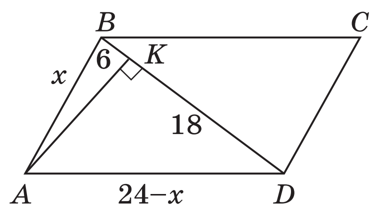


Рис. 7.196

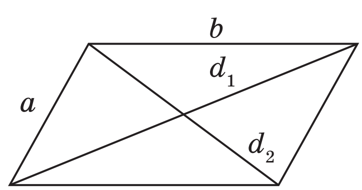


Рис. 7.197

$AK^2 = AB^2 - BK^2 = x^2 - 6^2$; $AK^2 = AD^2 - KD^2 = (24 - x)^2 - 18^2$, тогда $x^2 - 6^2 = (24 - x)^2 - 18^2$, $48x = 288$; $x = 6$. $AB = 6$; $AD = 24 - 6 = 18$.

Получили параллелограмм со сторонами 6 и 18 и диагональю 24 (рис. 7.198).

$a = 6$; $b = 18$; $d_1 = 24$. Найдем вторую диагональ: $d_2 = y$. $y^2 + 24^2 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 18^2$; $y = 12$.

Ответ: 24 см и 12 см.

7.3.2. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки

Прямоугольник

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется **прямоугольником** (рис. 7.198).

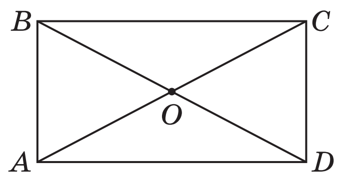


Рис. 7.198

Признаки прямоугольника:

1. Если диагонали параллелограма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник. Если $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник.
2. Если у параллелограмма **хоть один угол прямой**, то этот параллелограмм — прямоугольник. Если $\angle A = 90°$, $ABCD$ — прямоугольник.

Свойства прямоугольника:

1. Диагонали прямоугольника равны: $AC = BD$.
2. Центр окружности, описанной около прямоугольника, находится в точке пересечения диагоналей. Радиус этой окружности равен половине диагонали. O — центр окружности. $BO = R$ (рис. 7.199).
3. Прямые, проходящие через середины противоположных сторон, являются осями симметрии. l_1 и l_2 — оси симметрии (рис. 7.200).

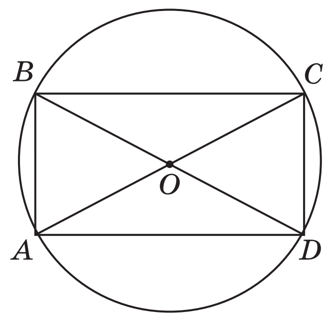


Рис. 7.199

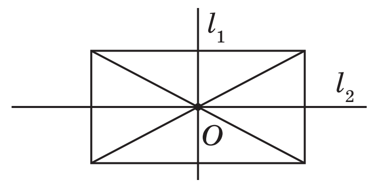


Рис. 7.200

Задача 1. Меньшая сторона прямоугольника равна 6 см. Найти диагонали прямоугольника и его бо́льшую сторону, если диагонали пересекаются под углом 60°.

Решение:

Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, т. е. $CD = OD$, $\angle COD = 60°$ (рис. 7.201). Если в равнобедренном треугольнике один угол 60°, то треугольник равносторонний. То есть $OC = OD = CD = 6$ см, тогда $AC = BD = 12$ см (рис. 7.203). $\angle ACD = 60°$. Из ΔACD: $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$; $AD = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$.

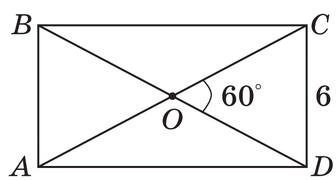


Рис. 7.201

Ответ: 12 см и $6\sqrt{3}$ см.

Задача 2. Биссектриса прямого угла прямоугольника делит его диагональ на отрезки 15 см и 20 см, считая от ближайшей к этому углу вершины. Найти длину отрезков, на которые эта биссектриса делит сторону прямоугольника.

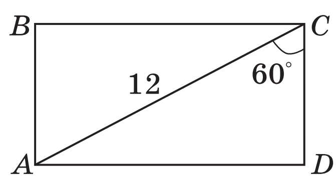


Рис. 7.202

Решение:

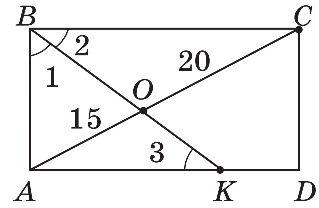


Рис. 7.203

Пусть BK —биссектриса $\angle B$ ($\angle B = 90°$) и делит AC на отрезки $AO = 15$ см, $OC = 20$ см, (рис. 7.203).

По свойству биссектрисы: $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$;

Пусть $AB = 3x$, $BC = 4x$, тогда $AC = 5x$ (египетский треугольник). Но $AC = AO + OC = 15 + 20 = 35$; $5x = 35$; $x = 7$; $AB = 3 \cdot 7 = 21$; $BC = 4 \cdot 7 = 28$.

ΔABK — равнобедренный (т. к. $\angle 1 = \angle 2$, но $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BK. Тогда $\angle 1 = \angle 3$).

$$AB = AK = 21,\ DK = 28 - 21 = 7.$$

Ответ: 21 см и 7 см.

Ромб

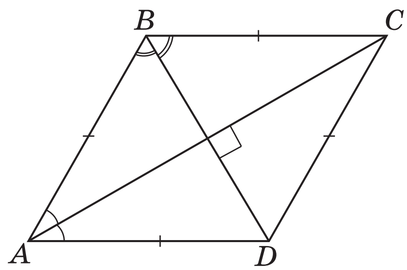


Рис. 7.204

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 7.204).

Признаки ромба:

Если в параллелограмме диагонали:

а) перпендикулярны,

б) являются биссектрисами углов,

в) делят параллелограмм на четыре равных треугольника, то этот параллелограмм — ромб.

Свойства ромба:

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
2. Диагонали являются биссектрисами углов.
3. Диагонали делят ромб на четыре равных треугольника.
4. Диагонали являются осями симметрии.
5. Центром окружности, вписанной в ромб, является точка пересечения диагоналей, радиус этой окружности равен половине высоты ромба (рис. 7.205):

$$r = \frac{1}{2}h.$$

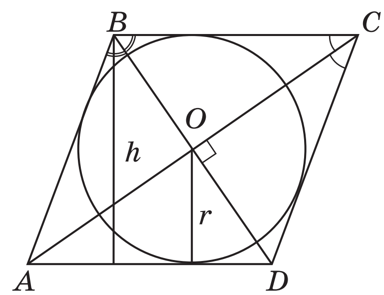


Рис. 7.205

Задача 3. Сторона ромба равна $12\sqrt{3}$ см, а тупой угол — 120°. Найти диагонали ромба.

Решение:

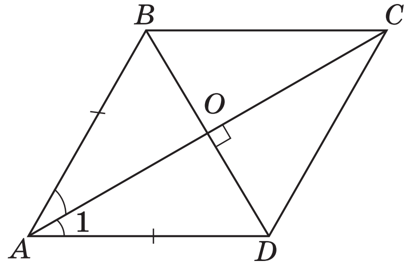


Рис. 7.206

Тупой угол, например, $\angle D = 120°$, тогда острый угол $\angle A = 180° - 120° = 60°$ (рис. 7.206).

Тогда ΔABD ($AB = AD$) — равносторонний и $BD = 12\sqrt{3}$; $BO = OD = 6\sqrt{3}$.

Рассмотрим ΔAOD ($\angle AOD = 90°$). По теореме Пифагора:

$$AO^2 = AD^2 - OD^2 = \left(12\sqrt{3}\right)^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 324.$$

$$AO = 18, \text{ тогда } AC = 36.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$ см и 36 см.

Задача 4. Из вершины острого угла ромба на продолжение стороны опущен перпендикуляр. Расстояния от основания этого перпендикуляра до концов этой стороны относятся как 32 : 7. Найти меньшую диагональ ромба, если его большая диагональ равна 40 см (рис. 7.207).

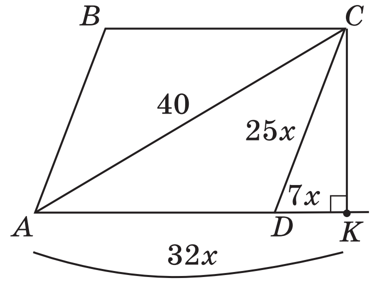


Рис. 7.207

Решение:

$CK \perp AD$; $DK : AK = 7 : 32$. Тогда пусть $DK = 7x$, $AK = 32x$, тогда $AD = 32x - 7x = 25x$. Найдем дважды катет CK из ΔACK и ΔDCK. $CK^2 = AC^2 - AK^2 = 40^2 - (32x)^2$;

$$CK^2 = CD^2 - DK^2 = (25x)^2 - (7x)^2.$$

Получим уравнение:

$$40^2 - (32x)^2 = (25x)^2 - (7x)^2;$$

$$625x^2 - 49x^2 = 1600 - 1024x^2;\ x = 1.$$

Тогда сторона ромба $CD = 25$ см. Получаем ромб со стороной $AD = 25$; $AO = 20$ (диагонали точкой пересечения делятся пополам) (рис. 7.208). $\angle AOD = 90°$ ($AC \perp BD$ — свойство ромба).

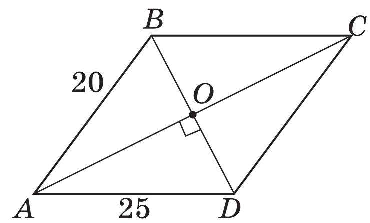


Рис. 7.208

По теореме Пифагора:

$$OD^2 = AD^2 - AO^2 = 25^2 - 20^2 = 225;$$

$$OD = 15\ (OD > 0);\ BD = 30\ (\text{см}).$$

Ответ: 30 см.

Задача 5. Найти углы ромба, если:

а) высота вдвое меньше стороны;

б) высота, проведенная из вершины тупого угла, отсекает от него равнобедренный треугольник.

Решение:

а) Пусть высота $BK = a$, тогда $AB = 2a$ (рис. 7.209).

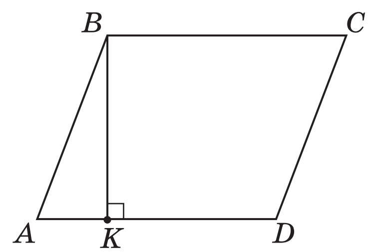


Рис. 7.209

$$\sin\angle A = \frac{BK}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};\ \angle A = 30° = \angle C;$$

$$\angle B = 180° - 30° = 150°;\ \angle B = \angle D = 150°.$$

б) Если высота BM отсекает ΔABM — равнобедренный и прямоугольный, то $\angle A = \angle ABM = 45°$. $\angle C = \angle A = 45°$ (рис. 7.210).

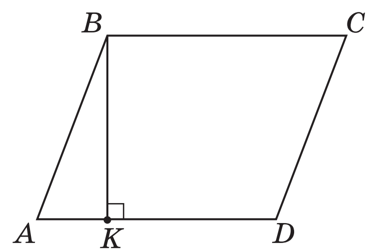


Рис. 7.210

Тогда $\angle B = 180° - 45° = 135°$. $\angle D = \angle B = 135°$.

Ответ: а) 30°, 135°, 30°, 150°; б) 45°; 135°; 45°; 135°.

Квадрат

Квадрат — это: 1) ромб, у которого все углы прямые; 2) прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба, прямоугольника.

Квадрат имеет **четыре оси симметрии**: две диагонали и два серединных перпендикуляра к сторонам (рис. 7.211).

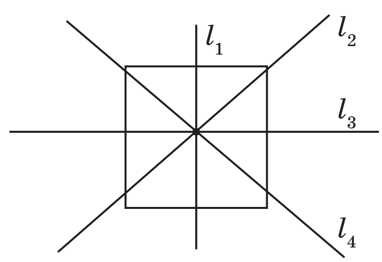


Рис. 7.211

Квадрат — правильный четырехугольник. Точка пересечения — это центр вписанной и описанной окружности, причем радиус вписанной окружности $r = \frac{a}{2}$, описанной окружности $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a — сторона квадрата (рис. 7.212).

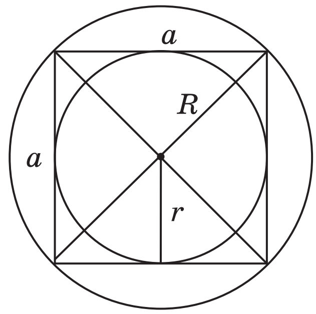


Рис. 7.212

Задача 6. Отрезок, который соединяет вершину квадрата с серединой противоположной стороны, равен $3\sqrt{5}$ см. Найти периметр и площадь квадрата.

Решение:

Пусть $BK = KC = x$, тогда $AB = BC = 2x$ (рис. 7.213).

ΔABK — прямоугольный, по теореме Пифагора $AK^2 = AB^2 + BK^2$;

$$(2x)^2 + x^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2;\ 5x^2 = 45;\ x^2 = 9;\ x = 3\ (x > 0).$$

$$AB = 2x = 6 \text{ см. Тогда } P = 4AB = 4 \cdot 6 = 24 \text{ (см)}.$$

$$S = AB^2 = 6^2 = 36 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 24 см; 36 см^2.

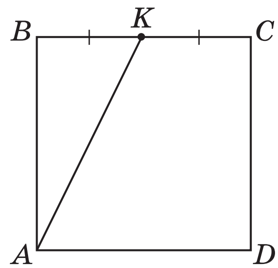


Рис. 7.213

Задача 7. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие его вершины — на катетах. Найти сторону квадрата, если гипотенуза равна 18 см.

Решение:

ΔAMN и ΔBPK — равнобедренные и прямоугольные (рис. 7.214), поскольку $NM \perp AB$ и $KP \perp AB$, $\angle A = \angle 1 = \angle 2 = \angle B = 45°$. Тогда $AM = MP = PB = 18 : 3 = 6$ (см).

Ответ: 6 см.

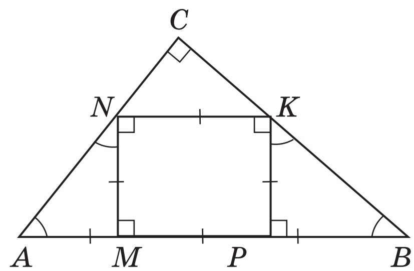


Рис. 7.214

7.3.3. Трапеция. Средняя линия трапеции; равнобедренная трапеция

Трапеция — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются **основаниями.**

BC — меньшее основание, AD — большее основание.

Непараллельные стороны называют **боковыми сторонами.**

AB и CD — боковые стороны (рис. 7.215).

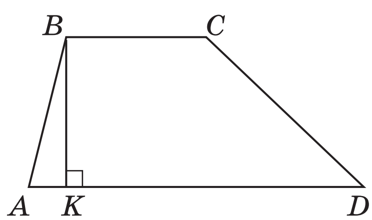


Рис. 7.215

Высота трапеции ($BK \perp AD$) — перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к прямой, содержащей другое основание.

Отрезки, соединяющие противоположные вершины, — диагонали трапеции.

AC и BD — диагонали (рис. 7.216).

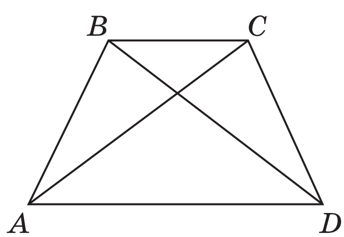


Рис. 7.216

Средняя линия трапеции

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Если $AM = MB$ и $CN = ND$, MN — средняя линия (рис. 7.217).

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Если a и b — длины оснований, а m — длина средней линии, то:

$$\boxed{m = \frac{a+b}{2}}$$

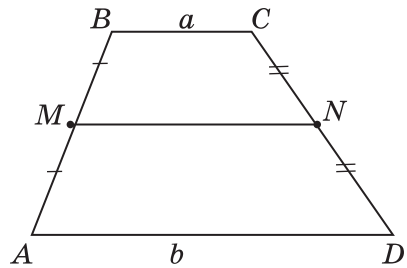


Рис. 7.217

Это утверждение называют теоремой о средней линии трапеции.

Задача 1. Основания трапеции относятся как 3 : 5, а средняя линия равна 32 см. Найти основание (рис. 7.218).

Решение:

Пусть $a = 3x$, $b = 5x$, тогда по теореме о средней линии трапеции $\frac{a+b}{2} = m$, т. е. $\frac{3x+5x}{2} = 32$;

$4x = 32$; $x = 8$, $a = 8 \cdot 3 = 24$; $b = 8 \cdot 5 = 40$.

Ответ: 24 см; 40 см.

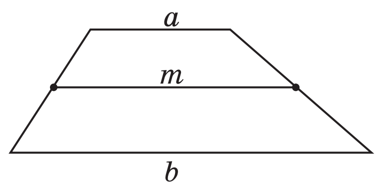


Рис. 7.218

Прямоугольная трапеция

Прямоугольная трапеция — это трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям (рис. 7.219).

Свойства прямоугольной трапеции:

1. Длина высоты равна длине меньшей боковой стороны: $CM \perp AD$; $AB = CM$.
2. Если из вершины тупого угла опустить высоту, то она разделит трапецию на прямоугольный треугольник (ΔCMD) и прямоугольник ($ABCM$), причем $AM = BC$, а $MD = AD - BC$, т. е. отрезок MD равен разности оснований.

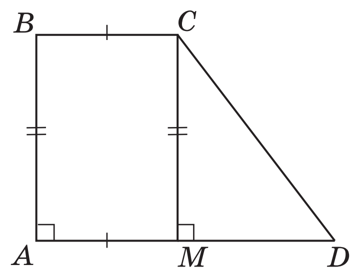


Рис. 7.219

Задача 2. Меньшая диагональ прямоугольной трапеции является биссектрисой прямого угла. Разность оснований трапеции равна 30 см, а разность боковых сторон — 18 см. Найти периметр трапеции.

Решение:

Пусть в прямоугольной трапеции проведена высота CM, $CM = AB$. Разность оснований равна 30 см, т. е. $MD = 30$ (рис. 7.220).

Пусть $AB = CM = x$, тогда $CD = x + 18$, поскольку разность боковых сторон равна 18.

По теореме Пифагора: $CD^2 = CM^2 + MD^2$; $(x+18)^2 = x^2 + 30^2$; $x^2 + 36x + 324 = x^2 + 900$; $x = 16$. Тогда $AB = 16$ см; $CD = 16 + 18 = 34$ (см).

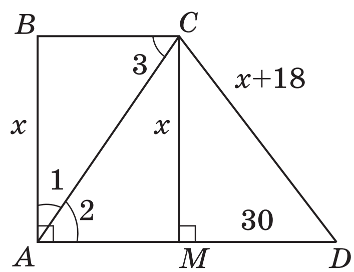


Рис. 7.220

Найдем основания трапеции. AC — биссектриса $\angle A$, тогда $\angle 1 = \angle 2$, но $\angle 2 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC, т. е. $\angle 1 = \angle 3$.

ΔABC — равнобедренный, т. е. $AB = BC = 16$ см, $AM = 16$ см. $AD = AM + MD =$ $= 16 + 30 = 46$ см.

$$P = AB + BC + CD + AD = 16 + 16 + 34 + 46 = 112 \text{ (см)}.$$

Ответ: 112 см.

Равнобедренная трапеция

Если боковые стороны трапеции равны, то трапецию называют **равнобедренной (равнобокой, равнобочной)** (рис. 7.221).

Свойства равнобедренной трапеции:

1. Углы при основаниях равны ($\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$).
2. Диагонали равны ($AC = BD$), $\Delta ABD = \Delta DCA$.
3. Высота, проведенная из вершины тупого угла (рис. 7.222), делит большее основание на отрезки m и n длиной:

$$\boxed{m = \frac{a+b}{2} \text{ (равен средней линии)}; \; n = \frac{b-a}{2}}$$

где b — длина большего основания, a — длина меньшего основания, причем $b = m + n$.

4. ΔBOC и ΔAOD — подобные равнобедренные треугольники. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (рис. 7.223).
5. Если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то высота трапеции равна средней линии, т. е. полусумме оснований (рис. 7.224):

$$\boxed{h = \frac{a+b}{2}}$$

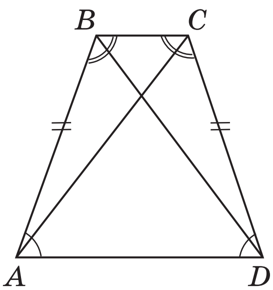


Рис. 7.221

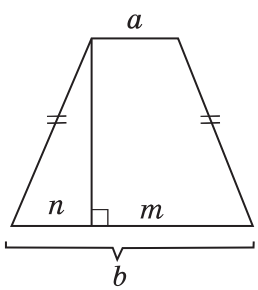


Рис. 7.222

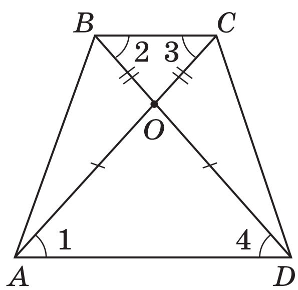


Рис. 7.223

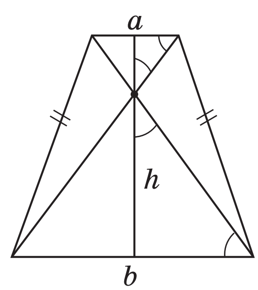


Рис. 7.224

Признак равнобокой трапеции

Если в трапеции выполняется одно из утверждений 1—4, то эта трапеция — равнобокая.

Задача 3. Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой тупого угла и делит среднюю линию на отрезки 3 см и 13 см. Найти высоту трапеции (рис. 7.225).

Решение:

MN — средняя линия, AC — биссектриса $\angle C$. $MO = 3$, $ON = 13$.

MO — средняя линия ΔABC, тогда $BC = 6$ (по теореме о средней линии треугольника).

Аналогично ON — средняя линия ΔACD, $AD =$ $= 26$ см.

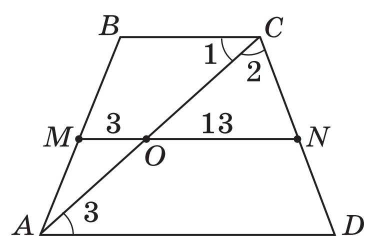


Рис. 7.225

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 3$, ΔACD — равнобедренный, $AD = CD = 26$, $AB = CD = 26$. Получим трапецию, где $AB = CD = AD = 26$, $BC = 6$ (рис. 7.226).

$$AK = \frac{AD - BC}{2} = \frac{26 - 6}{2} = 10 \ (BK \perp AD).$$

По теореме Пифагора: $BK^2 = AB^2 - AK^2 = 26^2 - 10^2 = 576$; $BK = 24$.

Ответ: 24 см.

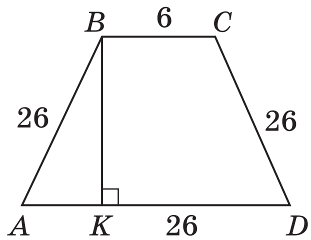


Рис. 7.226

Трапеция и окружность

1. Если около трапеции **описана окружность**, то эта трапеция — **равнобокая.** Верно и обратное: около **равнобокой трапеции можно описать окружность** (рис. 7.227).
2. Если в трапецию **вписана окружность** (рис. 7.228), то:
   а) сумма оснований равна сумме боковых сторон: $AB + CD = BC + AD$;
   б) радиус r этой окружности равен половине высоты трапеции h: $r = \dfrac{h}{2}$;
   в) если соединить центр окружности с вершинами трапеции, треугольники, прилежащие к боковым сторонам, будут прямоугольными;
   $$\angle AOB = \angle COD = 90^\circ,$$
   ΔAOB и ΔCOD — прямоугольные.

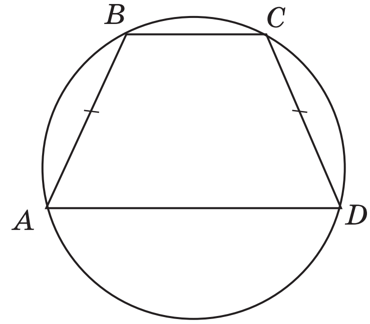


Рис. 7.227

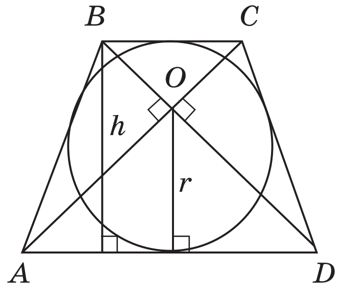


Рис. 7.228

Задача 4. Найти периметр описанной трапеции, если ее основания равны 5 см и 11 см.

Решение:

Если трапеция описана около окружности, это значит, что в трапецию вписали окружность и выполняется свойство: $AB + CD = BC + AD = 5 + 11 = 16$ (рис. 7.229).

$$P = (AB + CD) + (BC + AD) = 16 + 16 = 32 \text{ (см)}.$$

Ответ: 32 см.

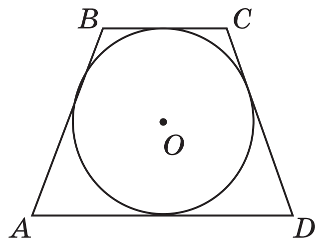


Рис. 7.229

Задача 5. Концы большей боковой стороны прямоугольной трапеции удалены от центра вписанной в нее окружности на 15 см и 20 см. Найти периметр трапеции (рис. 7.230).

Решение:

Пусть в трапецию $ABCD$ ($AB \perp AD$) вписана окружность, точки M, K, N и P — точки касания.

ΔCOD — прямоугольный с катетами $OC = 15$ и $OD = 20$.

По теореме Пифагора находим $CD = 25$.

Проведем $OK \perp CD$, это высота треугольника COD и радиус окружности, проведенный в точку касания.

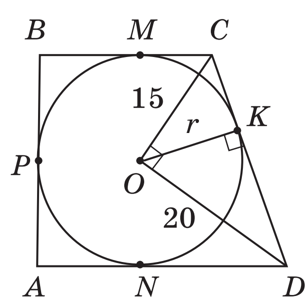


Рис. 7.230

Используем свойство прямоугольного треугольника:

$$OK \cdot CD = OC \cdot OD;\; OK = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$

По теоремам о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике:

$$CO^2 = CK \cdot CD;\; CK = \frac{CO^2}{CD} = \frac{15^2}{25} = 9;$$

$$OD^2 = DK \cdot CD;\; DK = \frac{OD^2}{CD} = \frac{20^2}{25} = 16.$$

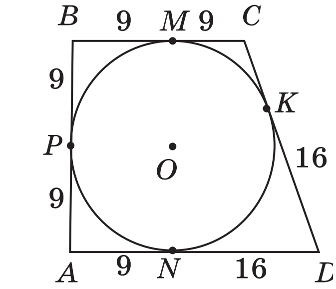


Рис. 7.231

AB — высота трапеции, поэтому $AB = 2 \cdot OK = 24$.

По теореме о двух касательных к окружности, выходящих из одной точки (рис. 7.231):

$$CM = CK = 9;\; KD = DN = 16;$$

$$AN = AP = PB = BM = 9.$$

Получаем: $AB = 18$; $BC = 18$; $AD = 25$; $CD = 25$.

$$P = 18 + 18 + 25 + 25 = 86 \text{ (см)}.$$

Ответ: 86 см.

Рассмотрим задачу на нахождение элементов трапеции, в которой необходимо выполнить дополнительное построение.

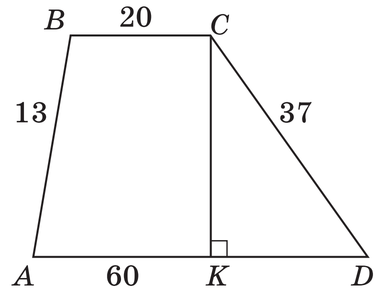


Рис. 7.232

Задача 6. Основания трапеции — 20 см и 60 см, а боковые стороны — 13 см и 37 см. Найти высоту трапеции (рис. 7.232).

Решение:

Проведем $CM \parallel AB$. Трапеция разбивается на параллелограмм $ABCM$ и треугольник CMD со сторонами $CM = 13$, $MD = AD - AM = 60 - 20 = 40$; $CD = 37$. Высота CK ΔCMD является высотой трапеции (рис. 7.233).

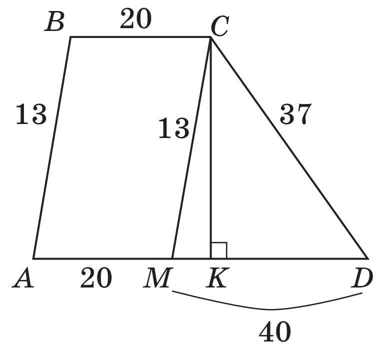


Рис. 7.233

По формуле площади треугольника:

$$S_{\Delta CMD} = \frac{MD \cdot CK}{2}, \text{ тогда } CK = \frac{S_{\Delta CMD}}{MD}.$$

Найдем площадь $S_{\Delta CMD}$ по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+37+40}{2} = 45;$$

$$S = \sqrt{45 \cdot (45-13)(45-40)(45-37)} = 240.$$

$$\text{Тогда } CK = \frac{2 \cdot 240}{40} = 12.$$

Ответ: 12 см.

7.3.4. Сумма углов выпуклого многоугольника

Ломаная называется **замкнутой**, если ее концы совпадают (рис. 7.234).

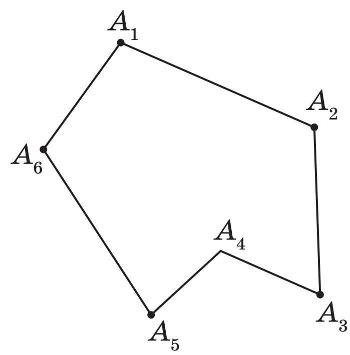


Рис. 7.234

Если соседние звенья ломаной не лежат на одной прямой, то простая замкнутая ломаная называется **многоугольником**.

Вершины ломаной называют **вершинами многоугольника:** A_1, A_2, A_3, ...

Звенья ломаной — **стороны многоугольника:** A_1A_2; A_2A_3; ...

Отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника, называют **диагоналями:** A_1A_3, A_1A_4 и т. д.

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону (рис. 7.235).

Так, многоугольник $ABCDEF$ — выпуклый, а многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — невыпуклый (рис. 7.236).

Углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, например $\angle ABC$, $\angle BCD$ и т. д (рис. 7.237).

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине.

Сумма углов выпуклого *n*-угольника равна:

$$\boxed{\sum\nolimits_n = 180^\circ \cdot (n-2)}$$

Сумма внешних углов выпуклого *n*-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° (рис. 7.238).

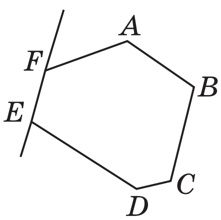


Рис. 7.235

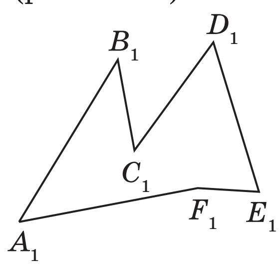


Рис. 7.236

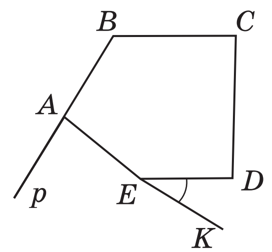


Рис. 7.237

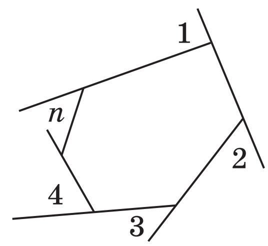


Рис. 7.238

Задача 1. Найти сумму углов выпуклого:

а) шестиугольника; б) восьмиугольника; в) двенадцатиугольника.

Решение:

а) $n = 6$; $\sum\nolimits_6 = 180^\circ \cdot (6-2) = 180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$;

б) $n = 8$; $\sum\nolimits_8 = 180^\circ \cdot (8-2) = 180^\circ \cdot 6 = 1080^\circ$;

в) $n = 12$; $\sum\nolimits_{12} = 180^\circ \cdot (12-2) = 180^\circ \cdot 10 = 1800^\circ$.

Задача 2. Определить количество сторон выпуклого многоугольника, если сумма его углов равна: а) 540°; б) 900°; в) 1260°.

Решение:

а) $180^\circ(n-2) = 540^\circ$; $n - 2 = 540 : 180$; $n - 2 = 3$; $n = 5$;

б) $180^\circ(n-2) = 900^\circ$; $n - 2 = 900 : 180$; $n - 2 = 5$; $n = 7$;

в) $180^\circ(n-2) = 1260^\circ$; $n - 2 = 1260 : 180$; $n - 2 = 7$; $n = 9$.

Ответ: 5; 7; 9.

Задача 3. Два угла выпуклого пятиугольника прямые, а остальные равны. Найти их градусную меру (рис. 7.239).

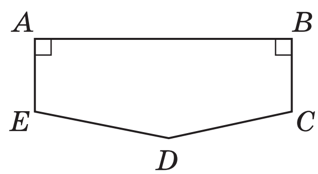


Рис. 7.239

Решение:

Найдем сумму углов выпуклого пятиугольника:

$$\sum\nolimits_5 = 180^\circ \cdot (5-2) = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ.$$

$$\angle A = \angle B = 90°;\ \angle C + \angle D + \angle E = 540° - 90° \cdot 2 = 360°.$$
$$\angle C = \angle D = \angle E = 360° : 3 = 120°.$$

Ответ: 120°.

Задача 4. Три угла выпуклого многоугольника равны по 80°, а остальные — по 160°. Найти количество сторон многоугольника.

Решение:

Пусть многоугольник имеет n углов, их сумма равна $180° \cdot (n - 2)$. Тогда получим уравнение:

$$80 \cdot 3 + 160(n - 3) = 180°(n - 2);\ 4 \cdot 3 + 8(n - 3) = 9(n - 2);$$
$$12 + 8n - 24 = 9n - 18;\ n = 6.$$

Ответ: 6.

7.3.5. Правильные многоугольники

Выпуклый n-угольник называется **правильным,** если у него все стороны равны и все углы равны (рис. 7.240):

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_{n-1}A_n;$$
$$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \ldots = \angle A_n.$$

Например, равносторонний треугольник, квадрат и т. д.

Сумма всех углов правильного n-угольника равна $(n - 2) \cdot 180°$, а каждый его угол равен:

$$\alpha_n = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}.$$

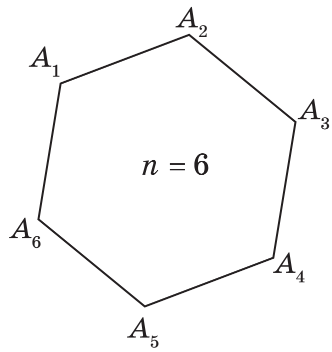


Рис. 7.240

Построение некоторых правильных многоугольников

Для построения правильных многоугольников удобно использовать окружность, описанную около многоугольника.

Центральный угол вычисляем по формуле:

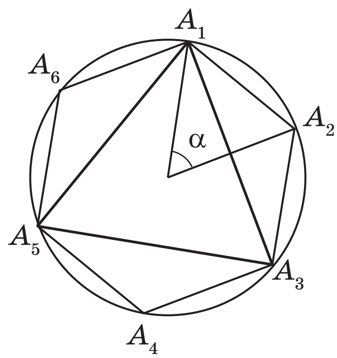
$$\boxed{\alpha_ц = \frac{360°}{n}}$$

Например, при $n = 6$, $\alpha = 60°$; при $n = 3$, $\alpha = 120°$.

Поэтому для построения правильного **шестиугольника** одну из вершин A_1 отмечаем произвольно, а из нее строим хорды A_1A_2, A_2A_3 и т. д., равные радиусу.

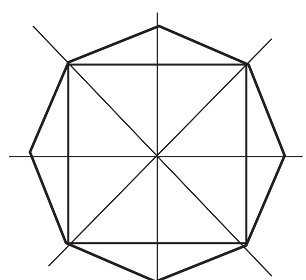
Если соединить эти вершины через одну, получим правильный **треугольник**.

Для построения правильного вписанного **четырехугольника** (квадрата) проводим через центр два взаимно перпендикулярных диаметра. Если каждый из прямых углов при этом поделить пополам, то вместе с вершинами квадрата получим вершины правильного восьмиугольника.



$n = 6$ и $n = 3$

Рис. 7.241



$n = 4$ и $n = 8$

Рис. 7.242

Задача 1. Найти углы правильного n-угольника, если:
а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 12$; г) $n = 18$.

Решение:

а) $\alpha_5 = \dfrac{180° \cdot (5-2)}{5} = 108°$; в) $\alpha_{12} = \dfrac{180° \cdot (12-2)}{12} = 150°$;

б) $\alpha_6 = \dfrac{180° \cdot (6-2)}{6} = 120°$; г) $\alpha_{18} = \dfrac{180° \cdot (18-2)}{18} = 160°$.

Задача 2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен: а) 60°; б) 90°; в) 135°?

Решение:

а) $\dfrac{180° \cdot (n-2)}{n} = 60°$; $180(n-2) = 60n$; $n = 3$;

б) $\dfrac{180° \cdot (n-2)}{n} = 90°$; $180(n-2) = 90n$; $2(n-2) = n$; $n = 4$;

в) $\dfrac{180° \cdot (n-2)}{n} = 135°$; $180(n-2) = 135n$; $4(n-2) = 3n$; $4n - 8 = 3n$; $n = 8$.

Задача 3. Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если дуга описанной окружности, которую стягивает его сторона, равна: а) 30°; б) 36°; в) 72° (рис. 7.243)?

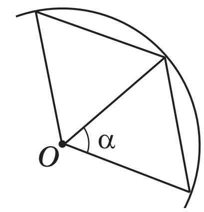


Рис. 7.243

Решение:

Очевидно, что $n = \dfrac{360°}{\alpha}$.

а) $n = \dfrac{360°}{30°} = 12$; $n = 12$; б) $n = \dfrac{360°}{36°} = 10$; $n = 10$; в) $n = \dfrac{360°}{72°} = 5$; $n = 5$.

Формулы для нахождения периметров и площадей правильных многоугольников

Периметр правильного n-угольника со стороной a можно вычислить по формуле:

$$\boxed{P_n = a \cdot n}$$

Например, периметр правильного треугольника: $P_3 = 3a$, периметр квадрата: $P_4 = 4a$, периметр правильного 12-угольника: $P_{12} = 12a$.

Площадь правильного n-угольника со стороной a можно вычислить по формуле:

$$\boxed{S = \dfrac{na^2}{4\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{180°}{n}\right)}}$$

где n — количество сторон (вершин), a — сторона.

Например:

1) площадь треугольника: $S_3 = \dfrac{3 \cdot a^2}{4\,\mathrm{tg}\,60°} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

2) площадь квадрата: $S_4 = \dfrac{4 \cdot a^2}{4\,\mathrm{tg}\,45°} = a^2$;

3) площадь правильного шестиугольника: $S_6 = \dfrac{6 \cdot a^2}{4\,\mathrm{tg}\,30°} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Задача 4. Найти площадь и периметр правильного шестиугольника со стороной $2\sqrt{3}$ см.

Решение:

$$P_6 = 6a = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}. \quad S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$ см и $18\sqrt{3}$ см^2.

7.4. Окружность и круг

7.4.1. Центральный, вписанный угол, величина вписанного угла

Угол разбивает плоскость на две части, каждая из которых называется **плоским углом** (рис. 7.244).

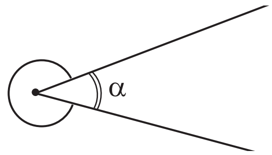


Рис. 7.244

Плоские углы с общими сторонами называются **дополнительными**.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре (рис. 7.245).

Часть окружности, которая расположена внутри плоского угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу.

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла, т. е. центральный угол измеряется дугой окружности.

Например, если $\cup AnB = 72°$, то это значит, что $\angle AOB = 72°$.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным в окружность** (рис. 7.246).

$\angle ABC$ вписан в окружность, поскольку его вершина B лежит на окружности, а стороны BA и BC пересекают окружность.

$\angle ABC$ и $\angle AOC$ **опираются** на дугу AnC (или на хорду AC). Говорят: «Хорду AC **видно** из точки O под углом AOC» или «Хорда AC **стягивает** дугу $\cup AnC$».

Теорема 1. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла или половине дуги, на которую он опирается (рис. 7.247):

$$\boxed{\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \cup AnC}$$

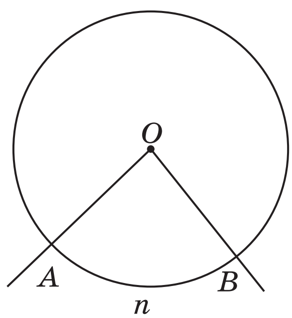


Рис. 7.245

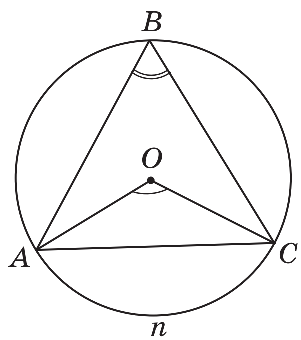


Рис. 7.246

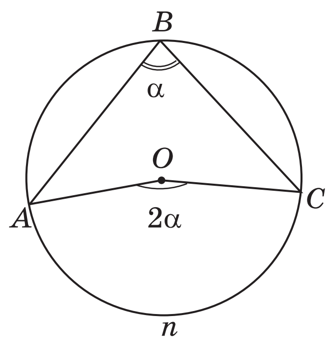


Рис. 7.247

Следствия:

1. Все вписанные углы, опирающиеся **на одну и ту же дугу** и лежащие по одну сторону от нее (или опирающиеся на одну и ту же дугу), равны (рис. 7.248).
2. Если два вписанных угла опираются на одну и ту же хорду, а их вершины лежат по разные стороны, то сумма этих углов равна 180° (рис. 7.249):
$$\angle ABC + \angle ADC = \alpha + \beta = 180°.$$
3. Все углы, опирающиеся на диаметр, **прямые** (рис. 7.250):
$$\angle A = \angle B = \angle C = 90°.$$
4. а) Центр окружности, описанной около **остроугольного** треугольника, лежит в середине треугольника (рис. 7.251).
   б) Центр окружности, описанной около **прямоугольного** треугольника, лежит на середине гипотенузы (рис. 7.252).
   в) Центр окружности, описанной около **тупоугольного** треугольника, лежит вне треугольника (рис. 7.253).
5. **Медиана прямоугольного треугольника,** проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы и равна радиусу окружности (рис. 7.254):
$$AO = BO = CO;\ R = m_c = \frac{c}{2}.$$
6. Градусные меры дуг окружностей, расположенные между двумя **параллельными** хордами, равны: $\smile AB = \smile CD$ (рис. 7.255).

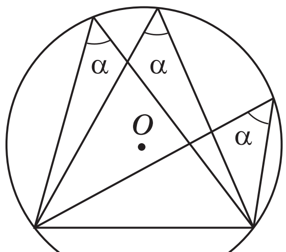


Рис. 7.248

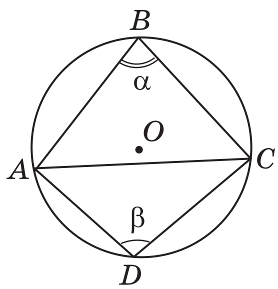


Рис. 7.249

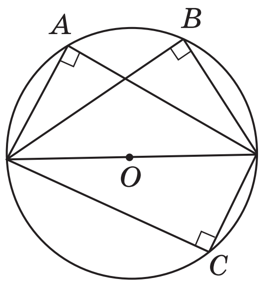
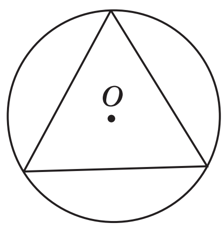
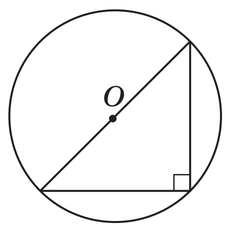


Рис. 7.250



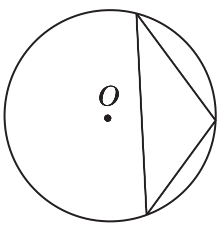
остроугольный

Рис. 7.251



прямоугольный

Рис. 7.252



тупоугольный

Рис. 7.253

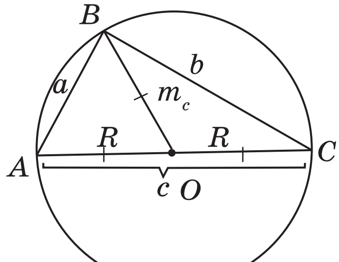


Рис. 7.254

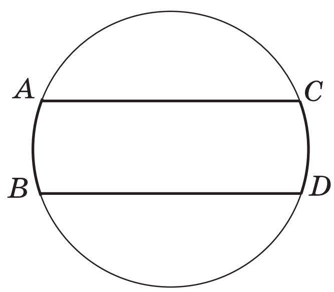


Рис. 7.255

Теорема 2. Угол, образованный касательной и хордой, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой (рис. 7.256):

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \angle AOB}$$

Теорема 3. Угол, образованный пересекающимися хордами, с вершиной внутри окружности, равен полусумме соответствующих дуг (рис. 7.257):

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup CD)}$$

Теорема 4. Угол, образованный секущими к окружности, с вершиной вне окружности, равен полуразности соответствующих дуг (рис. 7.258):

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}(\cup DC - \cup AB)}$$

Задача 1. Хорда AB стягивает дугу в 105°, а хорда AC — дугу в 35°. Найти $\angle BAC$.

Решение:

Найдем величину дуги BC, на которую опирается $\angle BAC$ (рис. 7.259):

$$\cup BC = 360° - (105° + 35°) = 210°.$$

По теореме о вписанных углах: $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup CB = 210 : 2 = 105°$.

Ответ: 105°.

Задача 2. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. $\cup CD = 44°$, $\cup BC = 82°$. Найти $\angle BEC$ (рис. 7.260).

Решение:

По теореме 3 угол между хордами $\angle BEC = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup CB) = \frac{1}{2}(44° + 82°) = 63°$.

Ответ: 63°.

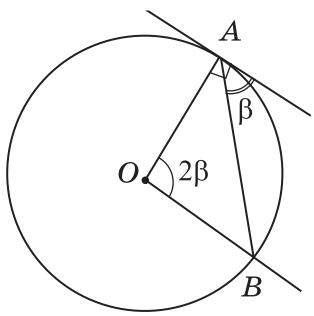


Рис. 7.256

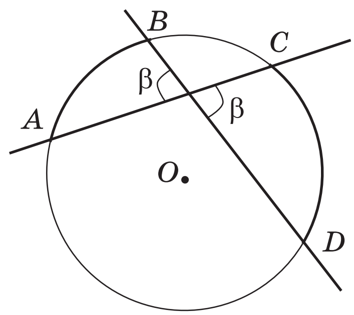


Рис. 7.257

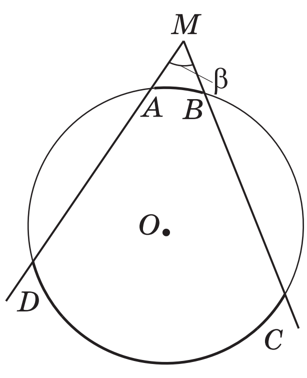


Рис. 7.258

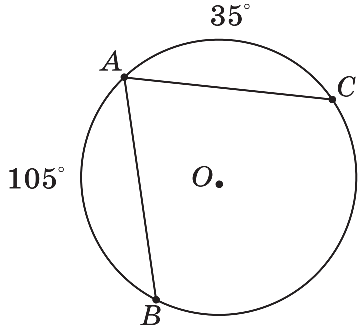


Рис. 7.259

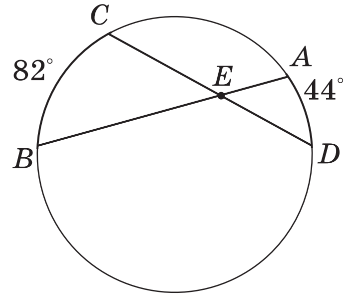


Рис. 7.260

Задача 3. Из точки окружности проведены две хорды. Одна из них стягивает дугу 100°. Найти дугу, которую стягивает вторая хорда, если угол между хордами 90°.

Решение:

Пусть из точки B провели хорды AB и BC. $\cup AB = 100°$; $\angle ABC = 90°$ (рис. 7.261). Поскольку $\angle ABC = 90°$, он опирается на диаметр AC, т. е. $\angle AOC = 180°$. $\cup ABC = 180°$; $\cup BC = 180° - 100° = 80°$. Хорда BC стягивает дугу 80°.

Ответ: 80°.

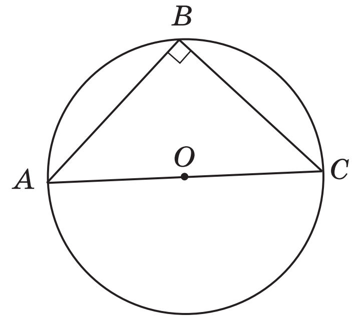


Рис. 7.261

Задача 4. Из точки окружности проведены хорды, длины которых 8 см и $4\sqrt{3}$ см. Концы этих хорд соединены отрезком, который стягивает дугу 60°. Найти диаметр окружности, если отрезок и точка лежат по разные стороны от центра окружности (рис. 7.262).

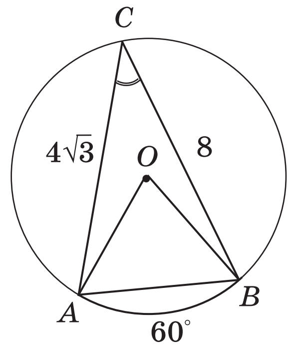


Рис. 7.262

Решение:

Из точки C провели хорды $AC = 4\sqrt{3}$ см и $CB = 8$ см. $\cup AB = 60°$. По теореме о вписанных углах: $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = 30°$. Найдем длину хорды AB по теореме косинусов $\left(\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $AB^2 + AC^2 + CB^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 8^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48 + 64 - 96 = 16; AB = 4$ см.

Дуга AB составляет 60°, значит, и центральный угол $\angle AOB = 60°$, но $AO = OB$, т. е. ΔAOB — равнобедренный с углом 60°, т. е. треугольник равносторонний, т. е. радиус $AO = AB = 4$ см. Диаметр равен 8 см.

Ответ: 8 см.

7.4.2. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей

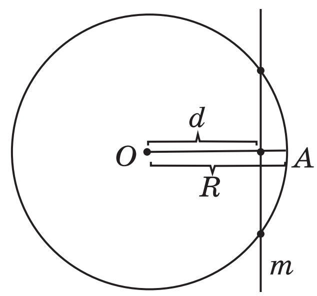


Рис. 7.263

Прямая и окружность могут иметь две общие точки, одну общую точку или не иметь их вообще.

Пусть прямая m не проходит через центр окружности радиуса R, а находится от центра на расстоянии d:

1) $d < R$. Если расстояние d от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности R, то прямая и окружность имеют две общие точки (рис. 7.263);
2) $d = R$. Если расстояние d от центра окружности до прямой равно радиусу окружности R, то прямая и окружность имеют одну общую точку (рис. 7.264);

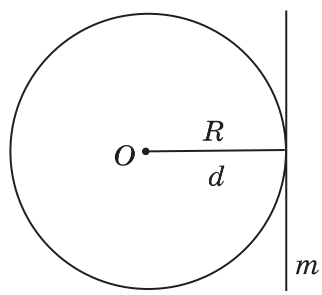


Рис. 7.264

3) $d > R$. Если расстояние d от центра окружности до прямой больше радиуса окружности R, то прямая и окружность не имеют общих точек (рис. 7.265).

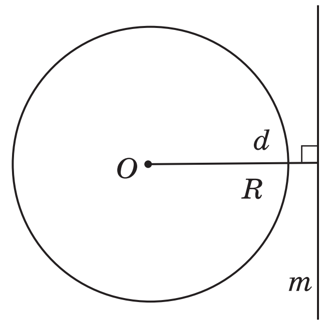


Рис. 7.265

Задача 1. Пусть d — расстояние от центра окружности радиуса R до прямой m. Каково взаимное расположение прямой m и окружности: а) $R = 16$ см; $d = 15$ см; б) $R = 7$ см; $d = 70$ мм; в) $R = 5$ см; $d = 5{,}1$ см.

Решение:

а) $d = 15$ см; $R = 16$ см; $d < R$, две точки пересечения;

б) $R = 7$ см $= 70$ мм; $d = 70$ мм; $R = d$, одна точка пересечения;

в) $R = 5$ см; $d = 5{,}1$ см; $d > R$, нет общих точек.

Теорема. Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит ее пополам,

т. е. если $R - r < OO_1 < R + r$,

то $AB \perp OO_1$ и $AK = KB$ (рис. 7.266).

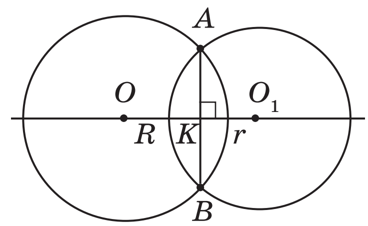


Рис. 7.266

Задача 2. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 см и 15 см, а общая хорда 24 см. Найти расстояние между центрами окружностей.

Решение:

Возможны два случая: центры окружностей O_1 и O_2 лежат по разные стороны от общей хорды и по одну сторону от нее (рис. 7.267).

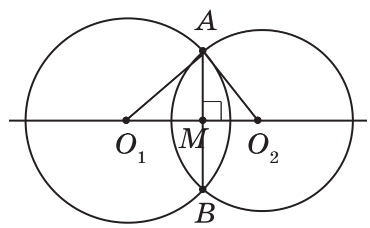


Рис. 7.267

Пусть окружность радиуса 15 см с центром O_1 и окружность радиуса 13 см с центром O_2 пересекаются в точках A и B. Тогда $O_1O_2 \perp AB$, и прямая O_1O_2 проходит через середину M отрезка AB (рис. 7.268).

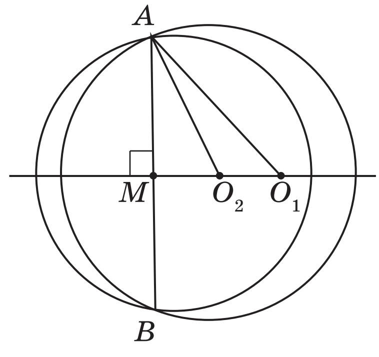


Рис. 7.268

Из прямоугольных треугольников AO_1M и AO_2M по теореме Пифагора находим:

$$MO_1 = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9;$$

$$MO_2 = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

а) Если точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB, то $O_1O_2 = MO_1 + MO_2 = 9 + 5 = 14$ (см).

б) Если точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB, то $O_1O_2 = MO_1 - MO_2 = 9 - 5 = 4$ (см).

Ответ: 14 см или 4 см.

Взаимное расположение двух окружностей

Пусть даны две окружности с радиусами R и r, OO_1 — расстояние между их центрами.

Возможны случаи:

1. **Окружности не имеют общих точек:**
   а) **окружности лежат одна вне другой.** Расстояние между их центрами больше суммы радиусов (рис. 7.269):
   $$R + r < OO_1.$$
   б) **одна окружность лежит внутри другой.** Расстояние между их центрами меньше разности радиусов (рис. 7.270):
   $$OO_1 < R - r.$$
2. **Окружности имеют только одну общую точку (касаются).**
   В этом случае точка касания лежит на линии центров (линия центров — прямая, проходящая через центры окружностей):
   а) **окружности** касаются **внешне.** Расстояние между их центрами равно сумме радиусов (рис. 7.271):
   $$OO_1 = R + r.$$
   б) **окружности** касаются **внутренне.** Расстояние между их центрами равно разности радиусов (рис. 7.272):
   $$OO_1 = R - r.$$
3. **Окружности пересекаются.** Расстояние между их центрами меньше суммы радиусов и больше их разности (рис. 7.273):
   $$R - r < OO_1 < R + r.$$

Задача 3. Одна окружность находится внутри другой. Их радиусы равны 28 см и 12 см, а кратчайшее расстояние между точками этих окружностей равно 10 см. Найти расстояние между центрами (рис. 7.274).

Решение:

Кратчайшее расстояние между точками двух таких окружностей равно наименьшему из двух отрезков линии центров, заключенных между окружностями.

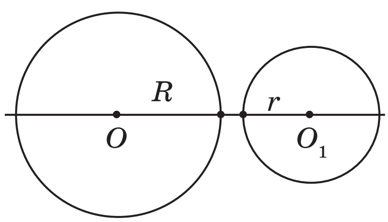


Рис. 7.269

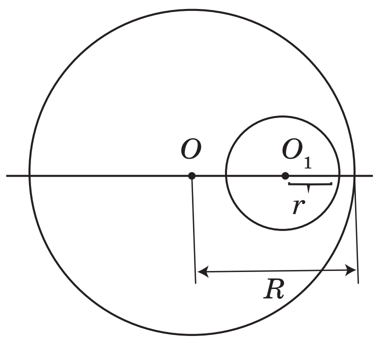


Рис. 7.270

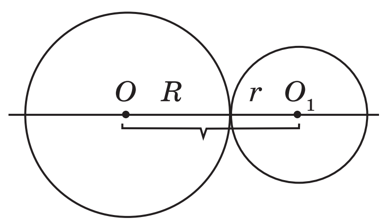


Рис. 7.271

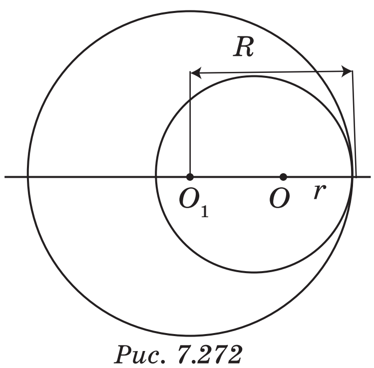


Рис. 7.272

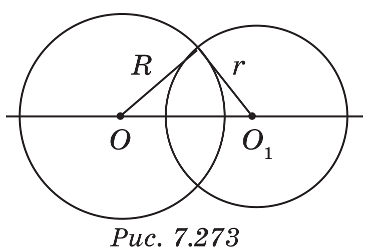


Рис. 7.273

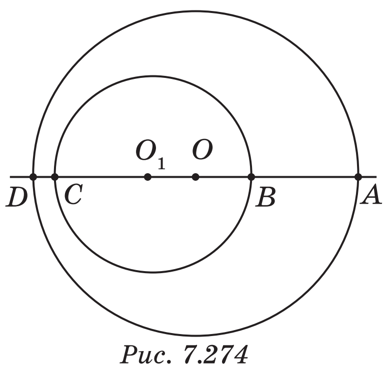


Рис. 7.274

Пусть O и O_1 — центры соответственно большей и меньшей окружностей. Проведем диаметр большей окружности так, чтобы он прошел через центр меньшей. Точки его пересечения с окружностями обозначим A, B, C и D. Если $DC = 10$, то $AB = 56 - 24 - 10 = 22$ (см), $AO_1 = 12 + 22 = 34$ (см), $OA = 28$ см, $OO_1 = 34 - 28 = 6$ (см).
Ответ: 6 см.

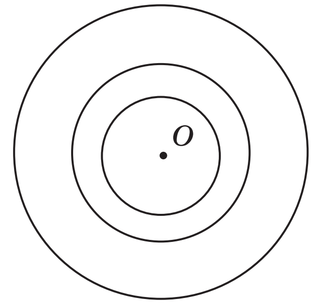


Рис. 7.275

Окружности, имеющие общий центр, называются **концентрическими** (рис. 7.275).

Концентрические окружности при равных радиусах совмещаются. Если радиусы различны, то окружности не имеют общих точек.

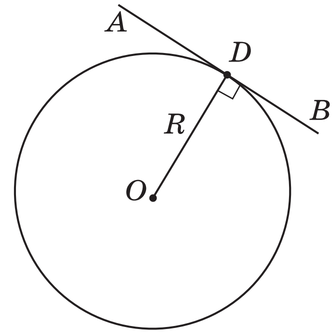


Рис. 7.276

7.4.3. Касательная и секущая к окружности, равенство отрезков касательных, проведенных из одной точки

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной** к окружности, а их общая точка называется **точкой касания** прямой и окружности (рис. 7.276).

Теорема. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания ($OD \perp AB$).

Верна и **обратная теорема: если прямая проходит через конец радиуса окружности и перпендикулярна этому радиусу, то она является касательной.**

Длиной касательной, выходящей из точки A к окружности с точкой касания D, является отрезок AD.

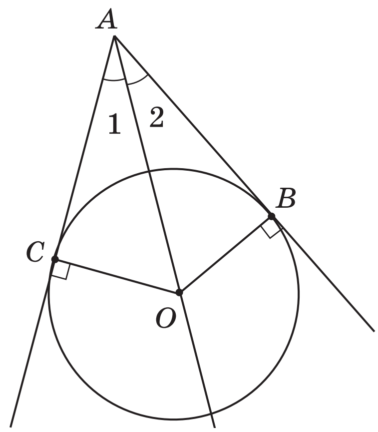


Рис. 7.277

Теорема о двух касательных, выходящих из одной точки:

1. Длины касательных, выходящих из одной точки к окружности, равны (рис. 7.277).
$$AB = AC.$$
2. Биссектриса угла между касательными, выходящими из одной точки, проходит через центр.
$$AO \text{ — биссектриса } (\angle 1 = \angle 2).$$

Задача 1. Точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит боковую сторону на отрезки 10 см и 8 см. Найти периметр треугольника.

Решение:

Очевидно, что задача имеет два решения:

а) Пусть $AB = BC$ и $BN = 10$; $NC = 8$, тогда $BM = 10$; $MA = 8$, т. к. ΔABC — равнобедренный (рис. 7.278).

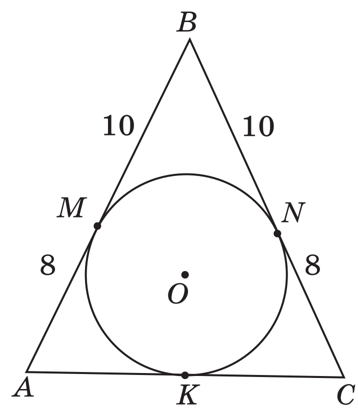


Рис. 7.278

По теореме о двух касательных, выходящих из одной точки: $AM = AK = 8$; $CN = CK = 8$. $AB = BC = 18$; $AC = 8 + 8 = 16$. $P = 18 \cdot 2 + 16 = 52$ (см).

б) Если $BN = BM = 8$ и $MA = NC = 10$, то по теореме о двух касательных $AM = AK = CK = CN = 10$. $AB = BC = 18$; $AC = 20$. $P = 2 \cdot 18 + 20 = 56$ (см) (рис. 7.279).

Ответ: 52 см или 56 см.

Задача 2. Центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его высоту, проведенную к основанию, на отрезки 12 см и 20 см, считая от основания. Найти периметр треугольника.

Решение:

По теореме о двух касательных, выходящих из одной точки, биссектриса угла между касательными проходит через центр (рис. 7.280). Значит, AO — биссектриса и по свойству биссектрисы в ΔABD ($BD \perp AC$) имеем:

$$\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3};\ \text{тогда}\ \frac{AB}{AD} = \frac{5}{3}\ \text{и}\ AB = 5x;\ AD = 4x.$$

ΔABD — египетский. $BD = 4x$; $4x = 32$; $x = 8$. $AB = 5 \cdot 8 = 40$; $AD = 4 \cdot 8 = 32$;

$AC = 32 \cdot 2 = 64$. $P = 2AB + AC = 2 \cdot 40 + 64 = 144$ (см).

Ответ: 144 см.

Пропорциональность отрезков хорд, касательных, секущих в круге

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности:

CD, MN, AB — хорды (рис. 7.281). Диаметр также является хордой, причем самой большой в круге.

Секущей называется прямая, имеющая с окружностью две общие точки, т. е. секущая пересекает окружность.

Свойства отрезков хорд, касательных и секущих

1. Если хорды AB и CD пересекаются в точке S, то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$ (рис. 7.282).

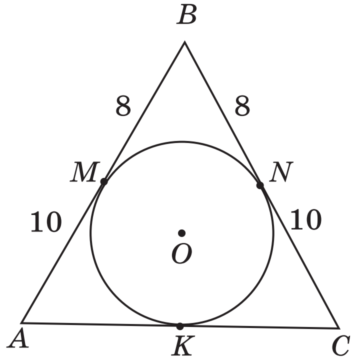


Рис. 7.279

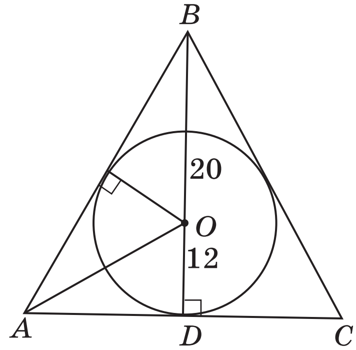


Рис. 7.280

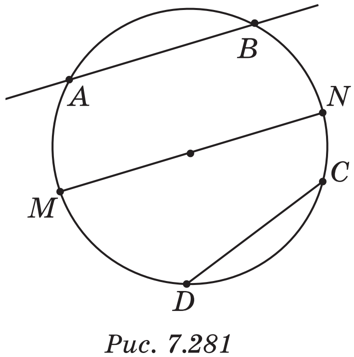


Рис. 7.281

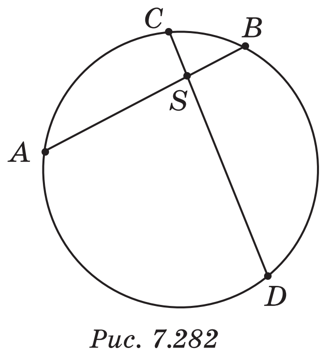


Рис. 7.282

2. Если из точки P к окружности проведены **две секущие**, которые пересекают окружность в точках A, B и C, D соответственно, то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ (рис. 7.283).
3. Если секущая выходит из некоторой точки C, то отрезок AC называют **внешней** частью секущей, AB — внутренней (рис. 7.284).
   Если из одной точки к окружности провести **секущую и касательную,** то квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $CD^2 = AC \cdot BC$.
4. Пусть AB — диаметр окружности, точка C — любая точка окружности, $CD \perp AB$, тогда $CD^2 = AD \cdot BD$ (рис. 7.285).
5. **Теорема Птолемея. Во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противолежащих сторон** (рис. 7.286):

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Задача 3. Хорда длиной 40 см пересекает другую хорду и делит ее на отрезки в отношении 3 : 8. Найти длину отрезков первой хорды, на которые делит ее вторая хорда, если разность отрезков второй хорды 20 см.

Решение:

Пусть хорда $AB = 40$ см (рис. 7.287). Она делит хорду CD на отрезки CS и SD такие, что $CS : SD = 3 : 8$ и $SD - CS = 20$ см.

Пусть $CS = 3x$, $SD = 8x$, тогда $8x - 3x = 20$; $5x = 20$; $x = 4$. $SC = 12$ см; $SD = 32$ см.

По теореме о двух пересекающихся хордах:

$$AS \cdot SB = CS \cdot SD.$$

Пусть $BS = y$; $AS = 40 - y$. $y(40 - y) = 12 \cdot 32$; $y^2 - 40y + 384 = 0$; $y_1 = 24$, $y_2 = 16$.

Тогда если $BS = 24$, то $AS = 16$ и если $BS = 16$, то $AS = 24$.

Ответ: 24 см, 16 см.

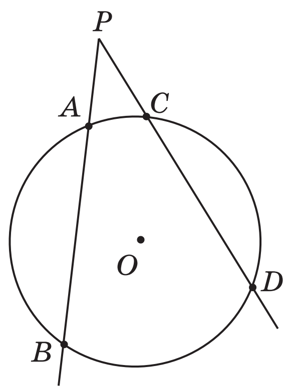


Рис. 7.283

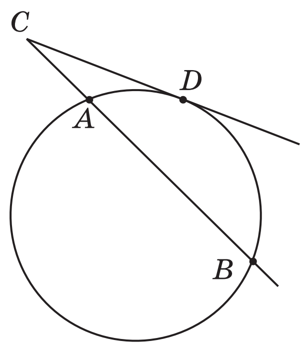


Рис. 7.284

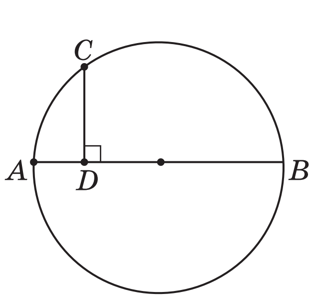


Рис. 7.285

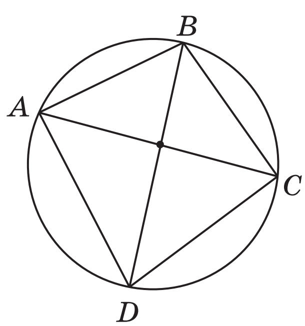


Рис. 7.286

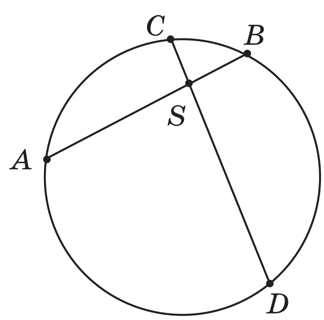


Рис. 7.287

Задача 4. Из точки вне окружности проведена секущая, пересекающая окружность в точках, удаленных от данной точки на 12 см и 20 см. Расстояние от этой точки до центра равно 17 см. Найти радиус окружности.

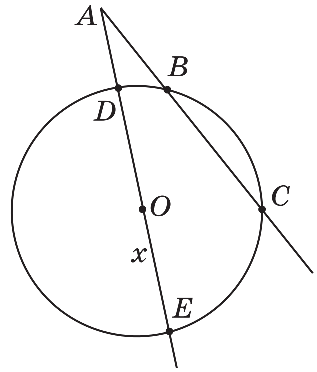


Рис. 7.288

Решение:

Пусть из точки A провели секущую так, что $AB = 12$ см, $AC = 20$ см (рис. 7.288).

$AO = 17$. Пусть $OE = x$, тогда $AD = 17 - x$, $AE = 17 + x$.

По теореме о двух секущих: $AD \cdot AE = AB \cdot AC$. $(17 + x)(17 - x) = 12 \cdot 20$; $x = 23$.

Ответ: 23 см.

Задача 5. Из точки вне окружности проведена секущая, внутренняя и внешняя часть которой относятся как 5 : 4. Найти длину всей секущей, если касательная, проведенная из этой же точки к окружности, равна 12 см.

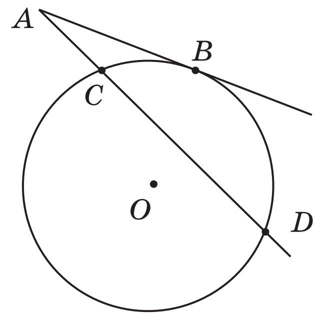


Рис. 7.289

Решение:

Из точки A проведена касательная $AB = 12$ см и секущая AD, причем $CD : AC = 5 : 4$ (рис. 7.289).

Тогда $CD = 5x$, $AC = 4x$, $AD = 9x$. Учитывая, что $AB^2 = AC \cdot AD$, получим:

$$4x \cdot 9x = 12^2;\ 36x^2 = 144;$$
$$x = 2.\ AD = 2 \cdot 9 = 18.$$

Ответ: 18 см.

7.4.4. Окружность, вписанная в треугольник

Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех его сторон (рис. 7.290).

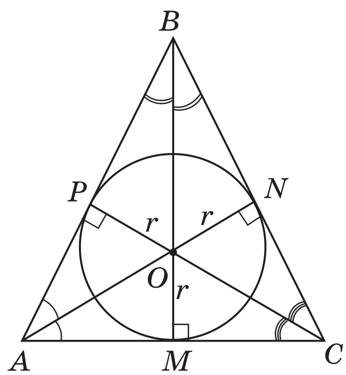


Рис. 7.290

Центр окружности, вписанный в треугольник, является точкой пересечения биссектрис углов треугольника.

В любой треугольник **можно вписать окружность,** и только одну.

Радиус вписанной окружности, как правило, обозначается r.

Положение центра вписанной окружности **зависит от вида треугольника:**

1. В **равнобедренном** треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, совпадает с медианой и высотой, на этой биссектрисе лежит центр вписанной окружности. Если $AB = BC$, то $O \in BD$ (BD — биссектриса, медиана, высота). $OM = OD = OK = r$ (рис. 7.291).

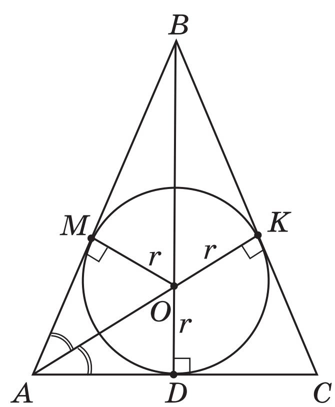


Рис. 7.291

2. В **равностороннем** треугольнике совпадают точка пересечения медиан, биссектрис, высот, центр

вписанной и описанной окружности. Эта точка называется **центром треугольника** (рис. 7.292).

Радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности вычисляется по формуле:

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{3}}{6}}$$

где a — сторона правильного треугольника.

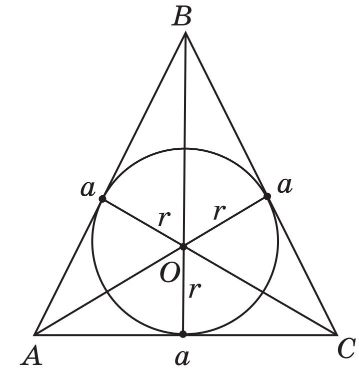


Рис. 7.292

3. В **прямоугольном** треугольнике (рис. 7.293) радиус вписанной окружности вычисляется по формуле:

$$\boxed{r = \frac{a + b - c}{2}}$$

где a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника.

Кроме того, справедливо равенство:

$$\boxed{a + b = 2R + 2r}$$

где R — радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника.

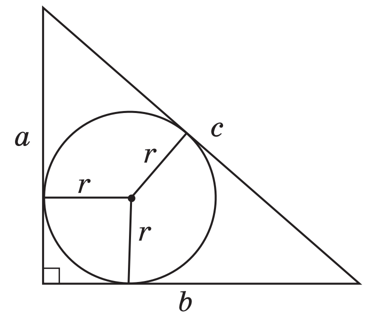


Рис. 7.293

4. В **произвольном** треугольнике со сторонами a, b и c (рис. 7.294) радиус вписанной окружности вычисляется по формуле:

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

где $p = \dfrac{a + b + c}{2}$, т. е. полупериметр, а S — площадь треугольника. То есть $r = \dfrac{2S}{a + b + c}$.

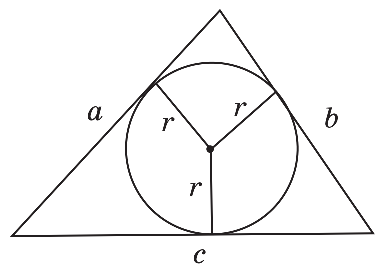


Рис. 7.294

Задача 1. Высота правильного треугольника равна 12 см. Найти радиус вписанной окружности.

Решение:

Пусть $BM \perp AC$, т. е. BM — высота, она же и медиана равностороннего треугольника, а медианы точкой пересечения делятся $BO : OM = 2 : 1$ (где O — центр треугольника) (рис. 7.295). $OM = r = 12 : 3 = 4$ (см).

Ответ: 4 см.

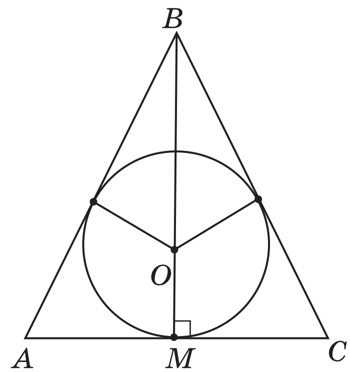


Рис. 7.295

Задача 2. Периметр равнобедренного треугольника 128 см, боковая сторона относится к высоте, проведенной к основанию, как 5 : 4. Найти диаметр вписанной окружности.

Решение:

$AB = BC$; $AB : BD = 5 : 4$ ($BD \perp AC$) (рис. 7.296).

Пусть $AB = 5x$; $BD = 4x$, тогда $AD = 3x$ (египетский треугольник).

$AC = 6x$. Периметр ΔABC: $6x + 5x + 5x = 16x$, а по условию это 128 см.

$$16x = 128;\ x = 8;\ AB = BC = 5 \cdot 8 = 40 \text{ см};$$

$$AC = 6 \cdot 8 = 48 \text{ см};\ BD = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}.$$

Для нахождения радиуса используем формулу:

$$r = \frac{2S}{a+b+c},$$

где $S = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{32 \cdot 48}{2} = 768$ (см²).

$$r = \frac{2S}{AB+BC+AC} = \frac{2 \cdot 768}{40+40+48} = 12,$$

диаметр равен 24 см.

Ответ: 24 см.

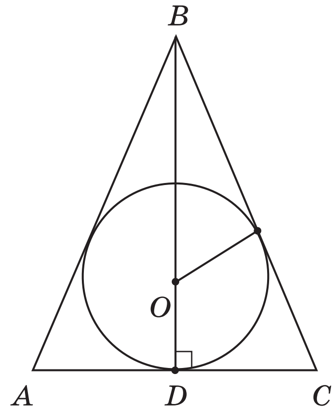


Рис. 7.296

Задача 3. Точка касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит его на отрезки 12 см и 8 см. Найти диаметр этой окружности (рис. 7.297).

Решение:

Пусть точка касания вписанной окружности делит его на отрезки $AK = 8$, $KB = 12$.

По теореме о двух касательных, выходящих из одной точки: $AK = AM = 8$; $BN = BK = 12$.

Пусть радиус вписанной окружности $OM = ON = x$, но $CMON$ — квадрат и $CM = CN = x$.

Получим: $AC = x + 8$; $AB = 20$; $CB = x + 12$.

По теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2, \text{ т. е.}$$

$$(x + 8)^2 + (x + 12)^2 = 20^2; \ x^2 + 20x - 96 = 0.$$

Уравнение имеет корни $x_1 = -24$ (не подходит по смыслу), $x_2 = 4$.

Итак, радиус равен 4 см, диаметр равен 8 см.

Ответ: 8 см.

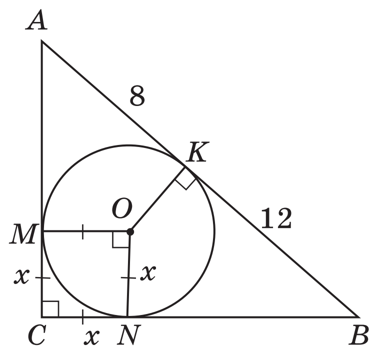


Рис. 7.297

7.4.5. Окружность, описанная около треугольника

Окружность называется **описанной около треугольника,** если она проходит через все его вершины (рис. 7.298).

Центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения **серединных перпендикуляров** к сторонам треугольника.

OM, OK и OP — серединные перпендикуляры к сторонам AB, BC и AC, $OA = OB = OC = R$, где R — радиус описанной окружности.

Около любого треугольника **можно описать окружность,** и только одну.

Положение центра описанной окружности зависит от **вида треугольника:**

1. В **остроугольном** треугольнике центр описанной окружности лежит во внутренней области треугольника (рис. 7.299).

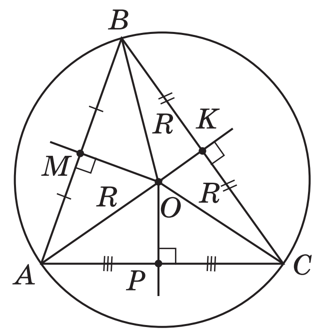


Рис. 7.298

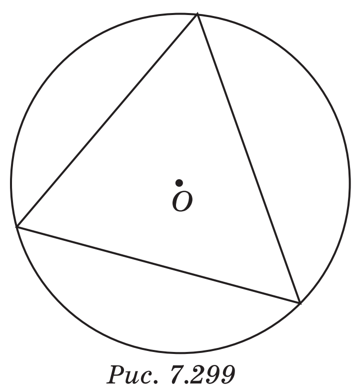


Рис. 7.299

2. В **тупоугольном** треугольнике центр описанной окружности лежит вне области треугольника (рис. 7.300).
3. В **прямоугольном** треугольнике центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы (рис. 7.301).
4. В **равнобедренном** треугольнике центр описанной окружности находится на высоте (медиане, биссектрисе), проведенной к основанию (рис. 7.302).
5. В **равностороннем** треугольнике центры вписанной и описанной окружности совпадают (рис. 7.303), радиус описанной окружности вычисляют по формуле:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

   где a — сторона равностороннего треугольника.
6. В **прямоугольном** треугольнике радиус описанной окружности (рис. 7.304):

$$\boxed{R = \frac{c}{2} = m_c}$$

   где c — гипотенуза, m_c — медиана, проведенная к гипотенузе.
   $a + b = 2R + 2r$, где a и b — катеты, r — радиус вписанной окружности.
7. В **произвольном** треугольнике со сторонами a, b и c (рис. 7.305) радиус описанной окружности вычисляется по формуле:

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

   где S — площадь треугольника или

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin\alpha}}$$

   где α — угол, противолежащий стороне a.

$$\boxed{R^2 = \frac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$$

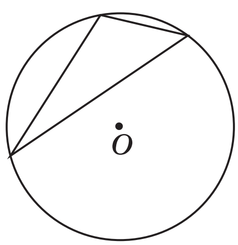


Рис. 7.300

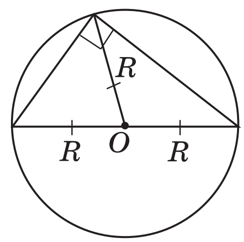


Рис. 7.301

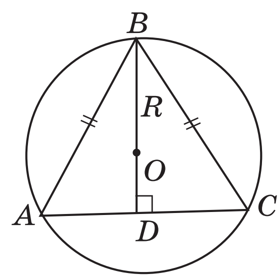


Рис. 7.302

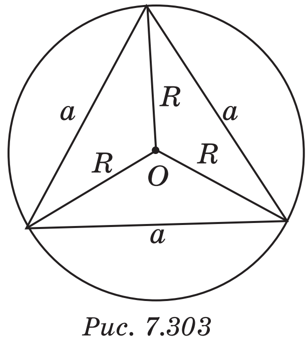


Рис. 7.303

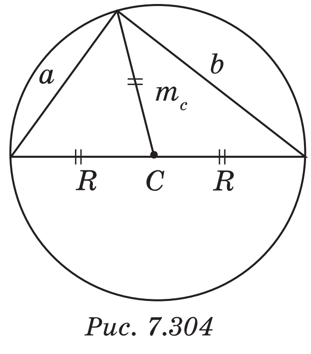


Рис. 7.304

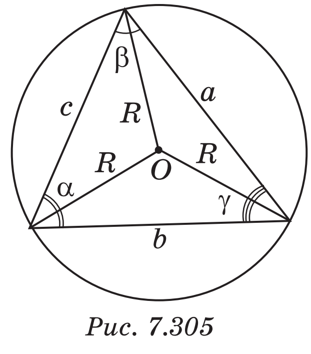


Рис. 7.305

Задача 1. Радиусы вписанной и описанной в прямоугольный треугольник окружностей равны 6 см и 15 см. Найти периметр треугольника.

Решение:

Пусть есть прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c (рис. 7.306). Радиус вписанной окружности $r = 6$ см, а описанной — $R = 15$ см. Гипотенуза $c = 2R = 30$ см.

Используем соотношение:

$$a + b = 2R + 2r = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 15 = 42.$$

$$P_{\Delta} = a + b + c = 42 + 30 = 72 \text{ (см)}.$$

Ответ: 72 см.

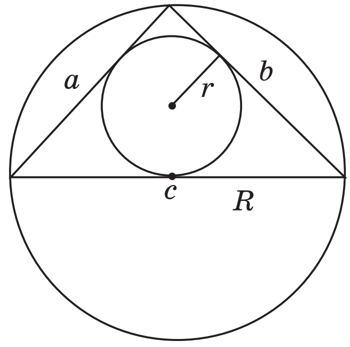


Рис. 7.306

Задача 2. Высота, проведенная к основанию треугольника, равна 72 см и делит его на отрезки 30 см и 96 см. Найти радиус описанной окружности.

Решение:

ΔABD и ΔBDC — прямоугольные (рис. 7.307). По теореме Пифагора:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 30^2 + 72^2 = 6\ 084;\ AB = 78;$$

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = 96^2 + 72^2 = 14\ 400;\ BC = 120.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{72 \cdot (30 + 96)}{2} = 4\ 536 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Найдем радиус описанной окружности по формуле:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{78 \cdot 120 \cdot 126}{4 \cdot 4\ 536} = 65.$$

Ответ: 65 см.

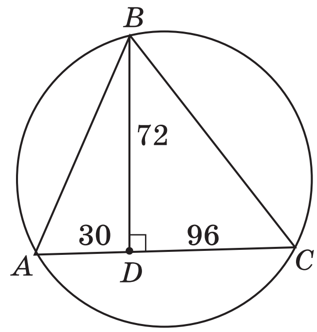


Рис. 7.307

Задача 3. В равнобедренном треугольнике угол при основании 30°, а основание равно $10\sqrt{3}$ см. Найти радиус описанной окружности (рис. 7.308).

Решение:

$$AB = BC;\ \angle A = \angle C = 30°,$$

$$\text{тогда } \angle B = 180° - (30° + 30°) = 120°.$$

Используем формулу $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, $\alpha = 120°$,

$$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad R = \frac{AC}{2\sin 120°} = \frac{10\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 10 \text{ (см)}.$$

Ответ: 10 см.

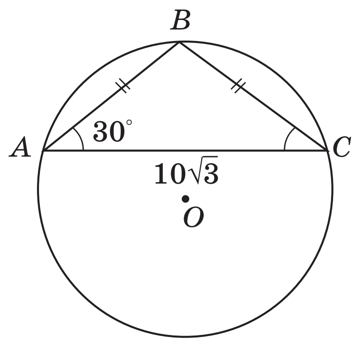


Рис. 7.308

Задача 4. Равнобедренный треугольник с высотой, проведенной к основанию 16 см, вписан в окружность радиуса 12,5 см. Найти периметр треугольника.

Решение:

Пусть $AB = BC$, центр окружности, описанной около ΔABC, находится на высоте BD, BK — диаметр окружности, $BK = 12{,}5 \cdot 2 = 25$ см (рис. 7.309).

$BD = 16$ см, тогда $DK = 9$ см.

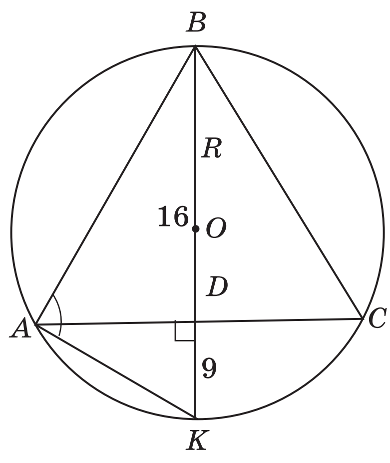


Рис. 7.309

Соединим точки A и K. ΔABK — прямоугольный, т. к. $\angle BAK$ опирается на диаметр и $\angle BAK = 90°$.

По теоремам о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике:

$$AD^2 = DK \cdot DB = 9 \cdot 16;\ AD = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ (см)};$$

$$AB^2 = BK \cdot BD = 25 \cdot 16;\ AB = \sqrt{25 \cdot 16} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (см)};$$

$$AB = BC = 20 \text{ см};\ AC = AD \cdot 2 = 24 \text{ (см)}.$$

$$P_{\Delta ABC} = 20 + 20 + 24 = 64 \text{ (см)}.$$

Ответ: 64 см.

7.4.6. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника

Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны и все углы равны (рис. 7.310).

Окружность называется **вписанной в многоугольник**, если она касается всех его сторон, т. е. стороны многоугольника являются касательными к этой окружности.

Окружность называется **описанной около многоугольника**, если она проходит через все его вершины.

Пусть R — радиус описанной, а r — радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник.

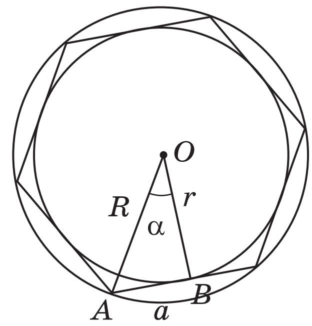


Рис. 7.310

В ΔAOB $\angle AOB = \dfrac{360°}{2n} = \dfrac{180°}{n}$, где n — число сторон многоугольника.

$AB = \dfrac{a}{2}$, где a — сторона правильного многоугольника.

Тогда $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$; $r = \dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}}$.

Пусть S_n — площадь правильного многоугольника, P_n — периметр правильного многоугольника.

Связь между P_n, R, r, S_n и a

Кол-во сторон многоугольника	R	r	S
n	$\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{a}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{180°}{n}$	$\dfrac{1}{2}P_n r$
3	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	a^2
6	а	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Зависимость стороны a_n правильного n-угольника от R и r

Кол-во сторон многоугольника	Зависимость a_n от R и n	Зависимость a_n от r и n
n	$a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$
3	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$a_6 = R$	$a_6 = \dfrac{2}{3}r\sqrt{3}$

Задача 1. В квадрат со стороной a вписана окружность. Найти сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

Решение:

Пусть сторона квадрата равна a (рис. 7.311). В квадрат вписана окружность, ее радиус равен $\dfrac{a}{2}$. Эта же окружность по отношению к треугольнику является описанной, и его сторона вычисляется по формуле: $a_3 = R\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

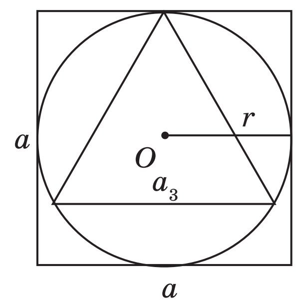


Рис. 7.311

Задача 2. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен 12 см. Найти радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.

Решение:

Окружность с центром в точке O имеет радиус $OC = 12$ см (рис. 7.312).

Вокруг этой окружности описан шестиугольник со стороной AB.

ΔOAB — равносторонний. $OC \perp AB$.

$$\angle AOC = 30^\circ.\ \ AC = OC\cdot\operatorname{tg}30^\circ = \frac{12\cdot\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

$$AB = 8\sqrt{3}.$$

Вокруг шестиугольника описана окружность, радиус которой равен стороне шестиугольника.

Ответ: $8\sqrt{3}$ см.

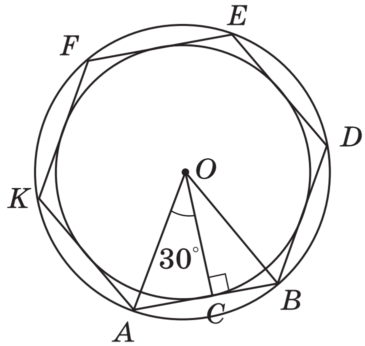


Рис. 7.312

Задача 3. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна a. Найти сторону правильного треугольника, вписанного в эту же окружность.

Решение:

Сторона квадрата $MNKP$ $MN = a$ (рис. 7.313).

Тогда радиус описанной окружности $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

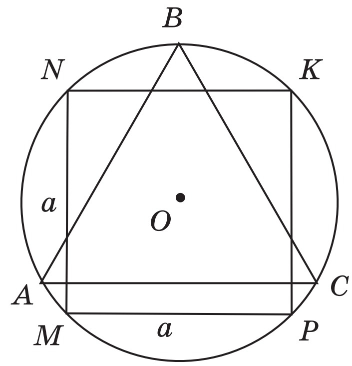


Рис. 7.313

В эту же окружность вписан треугольник, его сторона вычисляется по формуле:

$$a_3 = R\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

7.5. Измерения геометрических величин

7.5.1. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой

Отрезок — часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя ее точками — концами отрезка.

Для измерения отрезков служат различные инструменты, простейший из которых — линейка с делениями.

Аксиомы измерения отрезков

1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля (рис. 7.314):
$$AB = a > 0.$$
2. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой:
$$AB = AM + MB.$$

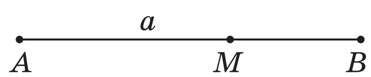


Рис. 7.314

Задача 1. В каком случае точки M, K и C лежат на одной прямой?

1) $MK = 3$ см; $KC = 10$ см; $MC = 8$ см;
2) $MK = 12$ см; $KC = 1$ см; $MC = 12$ см;
3) $MK = 15$; $KC = 5$ см; $MC = 10$ см.

Ответ: 3), поскольку $MK = KC + MC$, т. е. $15 = 5 + 10$.

Ломаная — геометрическая фигура, состоящая из точек, не лежащих на одной прямой и соединенных отрезками (рис. 7.315).

Вершины ломаной — это точки, которые соединяются отрезками: A, B, C, D, ...

Звенья ломаной — это отрезки, из которых состоит ломаная: AB, BC, CD, ...

Чтобы найти **длину ломаной**, необходимо сложить длины всех ее звеньев.

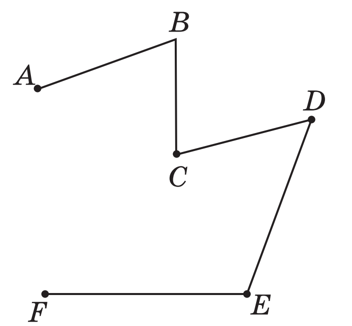


Рис. 7.315

Задача 2. Дана ломаная $ABCDEF$, причем $AB = 3$ см; $BC = 2{,}3$ см; $CD = 5{,}1$ см; $DE = 6{,}2$ см; $EF = 3{,}7$ см. Найти длину ломаной.

Решение:

$$AB + BC + CD + DE + EF = 3 + 2{,}3 + 5{,}1 + 6{,}2 + 3{,}7 = 20{,}3 \text{ (см)}.$$

Ответ: 20,3 см.

Ломаная может иметь самопересечения. Если первая и последняя точки ломаной совпадают, то ломаная называется **замкнутой** (рис. 7.316).

Замкнутую ломаную также называют **многоугольником** (рис. 7.317).

Многоугольник называется **выпуклым**, если каждая его диагональ лежит внутри многоугольника (рис. 7.318).

Число диагоналей выпуклого многоугольника вычисляется по формуле:

$$\boxed{\frac{n(n-3)}{2}}$$

где n — количество сторон многоугольника.

Периметр многоугольника равен сумме длин его сторон:

$$\boxed{P_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n}$$

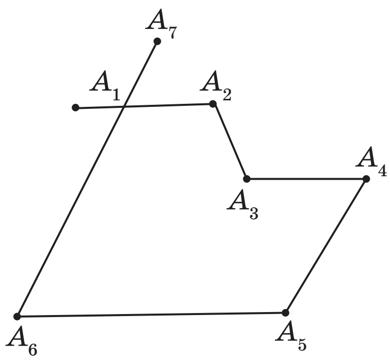


Рис. 7.316

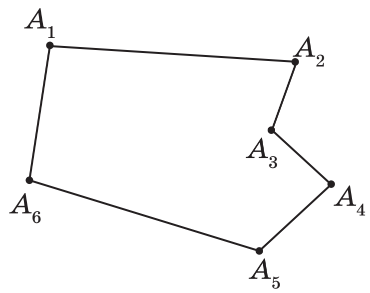


Рис. 7.317

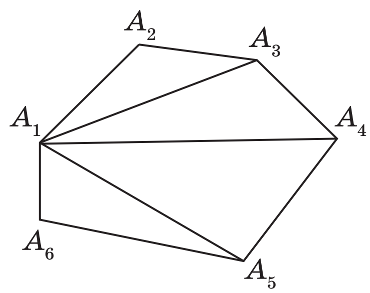


Рис. 7.318

Задача 3. Найти периметр пятиугольника, если одна из его сторон равна 7 см, а каждая последующая сторона на 1 см больше предыдущей.

Решение:

Очевидно, что длина сторон пятиугольника: 7, 8, 9, 10, 11.

$$P = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45 \text{ (см)}.$$

Ответ: 45 см.

Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Задача 4. Из точки к прямой проведены наклонные 23 см и 33 см. Найти расстояние от этой точки до прямой, если проекции наклонных относятся как 2 : 3.

Решение:

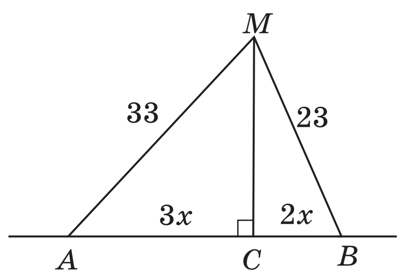


Рис. 7.319

Пусть наклонные, проведенные к прямой $MA = 33$ см, $MB = 23$ см (рис. 7.319). Расстояние от точки M до прямой AB — длина перпендикуляра MC ($MC \perp AB$). Проекции наклонных $CB : AC = 2 : 3$, т. е. $CB = 2x$, $AC = 3x$ (меньшей наклонной соответствует меньшая проекция).

Дважды выразим MC^2 по теореме Пифагора из ΔAMC и ΔMCB:

$$MC^2 = 33^2 - (3x)^2 \text{ и } MC^2 = 23^2 - (2x)^2.$$

Получим уравнение: $33^2 - 9x^2 = 23^2 - 4x^2$; $x^2 = 112$.

Тогда $MC^2 = 23^2 - 4x^2 = 23^2 - 4 \cdot 112 = 81$; $MC = 9$.

Ответ: 9 см.

7.5.2. Длина окружности

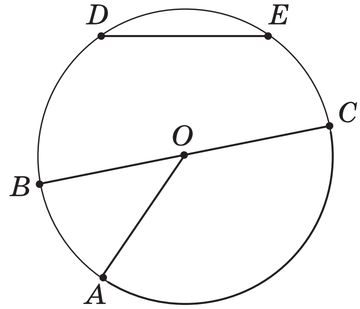


Рис. 7.320

Окружность — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра) (рис. 7.320).

Радиус — отрезок, соединяющий центр, с любой точкой окружности (обозначается R или r). $OA = R$.

Хорда — отрезок, соединяющий две точки на окружности. DE — хорда.

Диаметр — хорда, проходящая через центр окружности. BC — диаметр.

Обозначается D или d. Очевидно, что:

$$\boxed{D = 2R}$$

Дуга — часть окружности, заключенная между двумя точками: $\cup AC$; $\cup AB$; $\cup EC$.

Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей. Это число обозначается греческой буквой π («пи»).

Поскольку $\pi = \dfrac{c}{2R}$, получаем формулу для вычисления длины окружности:

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Число π является бесконечной непериодической десятичной дробью, т. е. иррациональным числом. При вычислениях обычно пользуются приближенным значением $\pi \approx 3{,}14$.

Задача 1. Найти длину окружности, описанной около:

а) прямоугольного треугольника с катетами a и b;

б) равностороннего треугольника со стороной a;

в) правильного шестиугольника с площадью $12\sqrt{3}$ см².

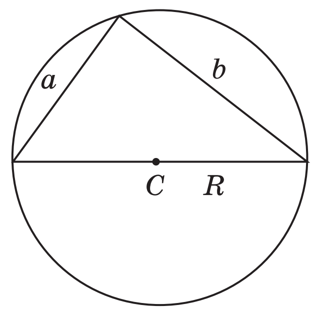


Рис. 7.321

Решение:

а) Найдем гипотенузу $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 7.321).

Радиус описанной окружности: $R = \dfrac{c}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$,

тогда $C = 2\pi R = \dfrac{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \pi\sqrt{a^2+b^2}$.

б) В равностороннем треугольнике

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, тогда $C = 2\pi R = \dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$ (рис. 7.322).

в) $S_6 = 12\sqrt{3}$ см², но $S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$;

$a = 2\sqrt{2}$; $R_6 = a = 2\sqrt{2}$; $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$.

Ответ: а) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; б) $\dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$; в) $4\sqrt{2}\pi$.

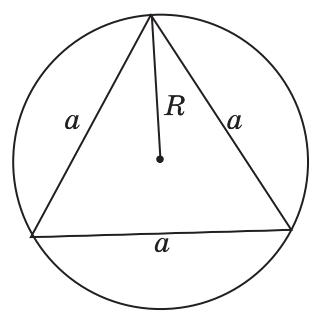


Рис. 7.322

Задача 2. Найти длину окружности, вписанной в:

а) прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α;

б) ромб со стороной a и острым углом 30°.

Решение:

а) $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$. Радиус вписанной окружности найдем по формуле (рис. 7.323):

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{c\sin\alpha + c\cos\alpha - c}{2} =$$

$$= \frac{c}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha - 1);\ C = 2\pi r = \pi c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1).$$

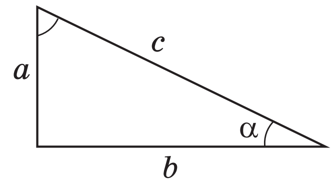


Рис. 7.323

б) Найдем высоту ромба, если сторона равна a, а острый угол 30° (рис. 7.324):

$$h = a\sin\alpha = a\sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Радиус вписанной в ромб окружности:

$$r = \frac{h}{2} = \frac{a}{4}.\ \ C = 2\pi = \frac{\pi a}{2}.$$

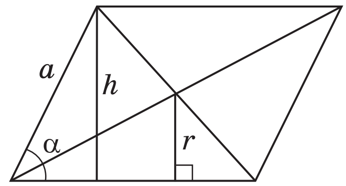


Рис. 7.324

Ответ: а) $\pi c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$; б) $\frac{\pi a}{2}$.

Задача 3. Автомобиль проехал 450 м. Найти диаметр колеса автомобиля, если известно, что колесо сделало 250 оборотов.

Решение:

Длина окружности колеса равна: 450 : 250 = 1,8 м = 180 см. $C = \pi D$, тогда $D = \frac{C}{\pi}$ и диаметр колеса: $D = \frac{180}{3{,}14} \approx 57{,}3$ (см).

Ответ: 57,3 см.

7.5.3. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности

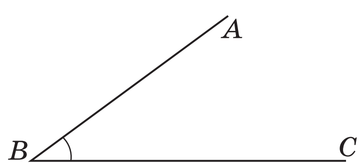
Угол — это фигура, состоящая из точки — вершины угла, и двух различных лучей, исходящих из этой точки, — сторон угла (рис. 7.326; 7.327).

Углы измеряют **в градусах.** Для измерения углов используют транспортир.

$1^\circ = \frac{1}{180}$ развернутого угла.

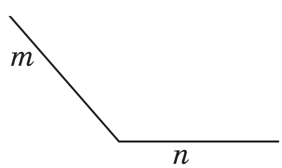
Аксиомы измерения углов:

1. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля:
$$\angle(ab) = n^\circ > 0.$$
2. Развернутый угол равен 180°.
3. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами (рис. 7.328):
$$\angle(ab) = \angle(am) + \angle(mb).$$



$\angle ABC$

Рис. 7.325



$\angle(mn)$

Рис. 7.326

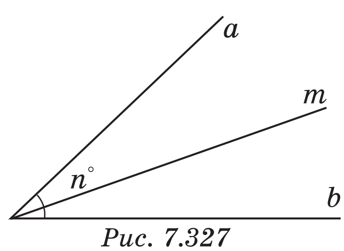


Рис. 7.327

Задача 1. Между сторонами угла (ab) провели луч так, что один из образовавшихся углов в 5 раз больше другого. Найти эти углы, если $\angle(ab) = 66°$.

Решение:

Пусть $\angle(bc) = x$, тогда $\angle(ac) = 5x$ (рис. 7.328).

По аксиоме измерения углов:

$$\angle(ac) + \angle(cb) = \angle(ab).$$

$$5x + x = 66;\ x = 11;\ 5x = 55.$$

Ответ: 11° и 55°.

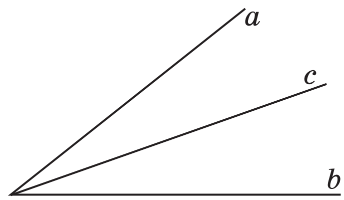


Рис. 7.328

Дуга — это часть окружности, заключенная между двумя точками (рис. 7.329).

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

$$\smile AB = \angle AOB = \alpha°.$$

Очевидно, что длина дуги в 1° составит:

$$l_{1°} = \frac{2\pi R}{360°} = \frac{\pi R}{180°}.$$

Тогда **длина дуги** в $\alpha°$:

$$\boxed{l_\alpha = \frac{\pi R \cdot \alpha°}{180°}}$$

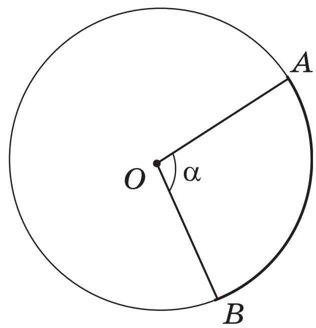


Рис. 7.329

Задача 2. Найти градусную меру дуги окружности радиуса 5 см, если ее градусная мера равна: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 72°.

Решение:

Для решения заданий *а)—г)* проще вычислить длину окружности и определить, какую ее часть составляет дуга.

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \approx 31{,}4 \text{ см}.$$

а) 360° : 30 = 12; т. е. 30°— $\frac{1}{12}$ часть окружности; $C_{30°} = 31{,}4 : 12 = 2{,}62$ см;

б) 360° : 45 = 8; $C_{45°} = 31{,}4 : 8 = 3{,}925$ см;

в) 360° : 60 = 6; т. е. 60°— $\frac{1}{6}$ часть окружности: $C_{6°} = 31{,}4 : 6 = 5{,}2$ см;

г) 360° : 90 = 4; т. е. $C_{90°} = 31{,}4 : 4 = 7{,}85$ см;

д) $C_{72°} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 72°}{180°} = 6{,}28$ или 180 : 72 = 5; 31,4 : 5 = 6,28 см.

Задача 3. Найти длину маятника стенных часов, если угол его колебания 38°, а длина дуги, которую он описывает, равна 48 см.

Решение:

Очевидно, что длина маятника — это радиус дуги окружности в 38° и длиной 48 см (рис. 7.331), т. е. если $l = \frac{\pi R \cdot \alpha°}{180°}$, то $R = \frac{180° l}{\pi \alpha°} = \frac{180° \cdot 48}{3{,}14 \cdot 38} \approx 40{,}5$ см.

Ответ: 40,5 см.

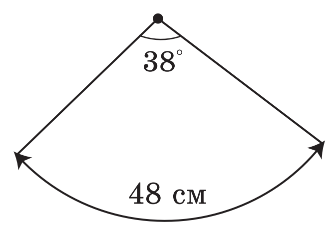


Рис. 7.330

Задача 4. Найти длину дуги, которую описывает конец минутной стрелки за 11 мин, если длина стрелки 12 см.

Решение:

Минутная стрелка за 11 мин проходит угол $\alpha = \dfrac{360^\circ}{60} \cdot 11 = 66^\circ$.

Тогда ее конец проходит расстояние $l = \dfrac{\pi R \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} = \dfrac{3{,}14 \cdot 12 \cdot 66}{180} \approx 13{,}8$ см.

Ответ: 13,8 см.

7.5.4. Площадь и ее свойства. Площадь прямоугольника

Площадь — геометрическое понятие, размер плоской фигуры.

Площадь многоугольника — это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник.

Единица измерения площади — **квадрат** со стороной, равной единице измерения отрезков, т. е. площадь измеряется, например, в квадратных сантиметрах — 1 см^2; квадратных метрах — 1 м^2 и т. д.

Основные свойства площадей:

1. Равные фигуры имеют равные площади.
2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников (рис. 7.331):

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_3}$$

3. Площадь квадрата равна квадрату его стороны (рис. 7.332).

Например, площадь квадрата со стороной 1 мм равна 1 мм^2.

Площадь квадрата со стороной a и диагональю d вычисляется по формуле:

$$\boxed{S_{\text{кв}} = a^2 \text{ или } S_{\text{кв}} = \frac{d^2}{2}}$$

т. к. $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

Площадь прямоугольника равна произведению смежных сторон a и b (рис. 7.333):

$$\boxed{S = ab}$$

Площадь прямоугольника можно вычислить, если известна длина его диагонали и угол между диагоналями (рис. 7.334):

$$\boxed{S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi}$$

Фигуры называются **равновеликими**, если они имеют одинаковую площадь. Например, квадрат со стороной $a = 6$ см ($S_{\text{кв}} = 36$ см^2) и прямоугольник со сторонами $a = 9$ см, $b = 4$ см ($S_{\text{пр}} = 36$ см^2) являются равновеликими.

Задача 1. Периметр прямоугольника равен 34 см, а диагональ 13 см. Найти площадь прямоугольника (рис. 7.335).

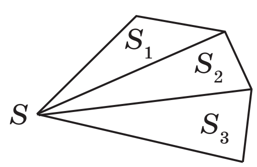


Рис. 7.331

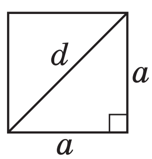


Рис. 7.332

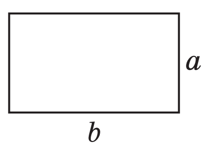


Рис. 7.333

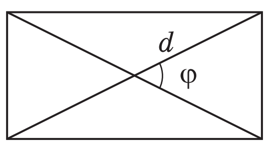


Рис. 7.334

Решение:

$P = 2(a + b) = 34$, тогда $a + b = 34 : 2 = 17$.

Пусть $a = x$, тогда $b = 17 - x$.

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = d^2$, тогда:

$$x^2 + (17 - x)^2 = 13^2;\ x^2 - 17x + 60 = 0;$$

$$x_1 = 5;\ x_2 = 12.$$

Если $x = 5$, то $17 - x = 12$; если $x = 12$, то $17 - x = 5$.

Стороны прямоугольника 5 и 12. $S = 5 \cdot 12 = 60$ (см^2).

Ответ: 60 см^2.

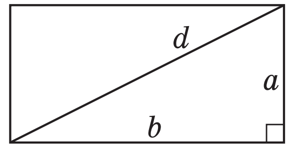


Рис. 7.335

Задача 2. Диагональ прямоугольника 20 см и составляет с его стороной угол 15°. Найти площадь прямоугольника (рис. 7.336).

Решение:

$\angle CAD = \angle BDA = 15°$, тогда:

$\angle COD = 15° + 15°$ (как внешний угол ΔAOD).

Воспользуемся формулой для нахождения площади прямоугольника через его диагональ:

$$S = \frac{1}{2} AC^2 \sin\varphi, \text{ где } \varphi = 30°;$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2}.\ \ S = \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{400}{4} = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 100 см^2.

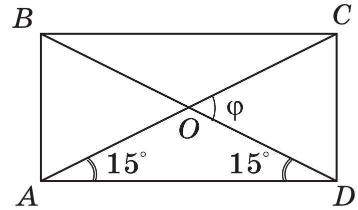


Рис. 7.336

Задача 3. Периметр прямоугольника 140 см, а перпендикуляр, проведенный из его вершины к диагонали, делит ее в отношении 9 : 16. Найти площадь прямоугольника (рис. 7.337).

Решение:

$BK \perp AC$, $AK : KC = 9 : 16$, тогда пусть $AK = 9x$, $KC = 16x$, $AC = 25x$.

По теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике:

$AB^2 = AC \cdot AK = 9x \cdot 25x$; $AB = \sqrt{9 \cdot 25 \cdot x^2} = 15x$; $BC^2 = KC \cdot AC = 6x \cdot 25x$; $BC = 20x$. $AB + BC = P : 2 =$ $= 140 : 3 = 70$. Получим уравнение: $15x + 20x = 70$; $x = 2$. $AB = 30$; $BC = 40$. $S_{пр} = 30 \cdot 40 = 1200$ (см^2).

Ответ: 1200 см^2.

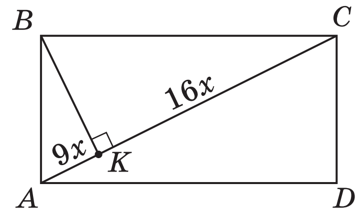


Рис. 7.337

Площадь **произвольного выпуклого четырехугольника** (рис. 7.338) можно найти по формуле:

$$\boxed{S_{чт} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi}$$

где d_1 и d_2 — диагонали четырехугольника, φ — угол между диагоналями.

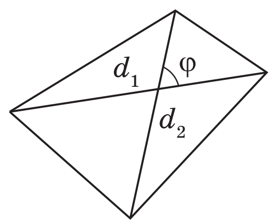


Рис. 7.338

Задача 4. Найти площадь четырехугольника с диагоналями 12 и $12\sqrt{2}$, если угол между ними равен 45°.

Решение:

$$d_1 = 12,\ d_2 = 12\sqrt{2},\ \varphi = 45°,\ \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 72.$$

Ответ: 72.

7.5.5. Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне (рис. 7.339):

$$\boxed{S_{\text{пар}} = b \cdot h_b \text{ или } S_{\text{пар}} = a \cdot h_a}$$

Следствие. В параллелограмме **большей** будет высота, проведенная к **меньшей** высоте, а **меньшей** — высота, проведенная к **большей** стороне.

Площадь параллелограмма равна произведению сторон на синус угла между ними (рис. 7.340):

$$\boxed{S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha}$$

Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними (рис. 7.341):

$$\boxed{S_{\text{пар}} = \frac{d_1 d_2}{2} \sin \varphi}$$

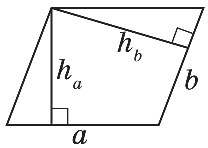


Рис. 7.339

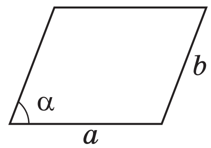


Рис. 7.340

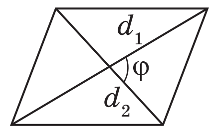


Рис. 7.341

Площадь ромба:

а) произведение стороны на высоту (рис. 7.342):

$$\boxed{S_{\text{р}} = ah}$$

б) произведение квадрата стороны на синус угла ромба (рис. 7.343):

$$\boxed{S_{\text{р}} = a^2 \sin \alpha}$$

в) половина произведения диагоналей (рис. 7.344):

$$\boxed{S_{\text{р}} = \frac{1}{2} d_1 d_2}$$

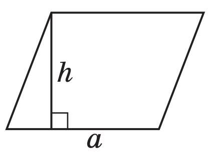


Рис. 7.342

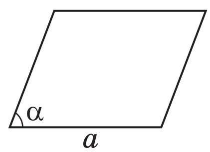


Рис. 7.343

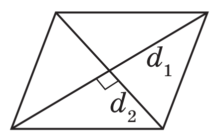


Рис. 7.344

Задача 1. Биссектриса угла параллелограмма, который равен 150°, делит его сторону на отрезки 24 см и 16 см, считая от вершины противолежащего угла. Найти площадь параллелограмма (рис. 7.345).

Решение:

BK — биссектриса и $\angle 1 = \angle 2$, но $\angle 2 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие ($AD \parallel BC$, BK — секущая). Тогда $\angle 1 = \angle 3$ и ΔABK — равнобедренный, $AB = AK = 16$. Имеем: $AB = 16$ см, $BC = AD = 16 + 24 = 40$ см, $\angle B = 150°$, $\sin 150° = \frac{1}{2}$; $S = AB \cdot BC \sin \angle B = 16 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} = 320$ (см^2). *Ответ*: 320 см^2.

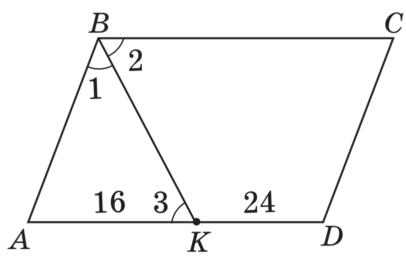


Рис. 7.345

Задача 2. Высоты параллелограмма, проведенные из вершины острого угла, равны 5 см и 12 см, а угол между ними 120°. Найти площадь параллелограмма. (рис. 7.346)

Решение:

Проведем высоты параллелограмма CM и CN из вершины C на продолжение сторон AB и AD.

$\angle MCN = 120°$. Сумма углов четырехугольника $AMCN$ равна 360°, тогда:

$$\angle A = 360° - (90° + 90° + 120°) = 60°.$$

Проведем $BK \perp AD$, $BK = CN = 5$ (см). $\sin\angle A = \dfrac{BK}{AB}$,

т. е. $AB = \dfrac{BK}{\sin\angle A} = \dfrac{5}{\sin 60°} = \dfrac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{3}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$;

$$S_{\text{пар}} = AB \cdot CM = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 12 = 40\sqrt{3} \ (\text{см}^2).$$

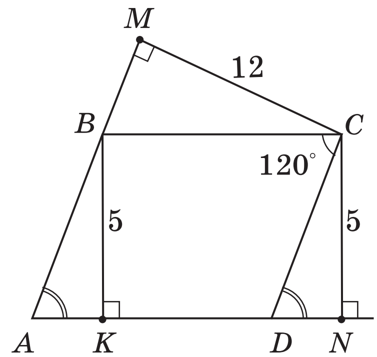


Рис. 7.346

Ответ: $40\sqrt{3}$ см².

Задача 3. Углы ромба относятся как 1 : 5, а сторона равна 12 см. Найти площадь ромба (рис. 7.347).

Решение:

$\angle A : \angle B = 1 : 5$. Тогда $\angle A = x$, $\angle B = 5x$, их сумма 180°. $x + 5x = 180°$; $x = 30°$.

$$S_{\text{р}} = AB^2 \sin\angle A = 12^2 \sin 30° = 144 \cdot \frac{1}{2} = 72 \ (\text{см}^2).$$

Ответ: 72 см².

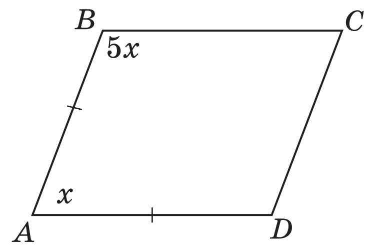


Рис. 7.347

Задача 4. Большая диагональ ромба делит его высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки 75 см и 21 см. Найти площадь ромба (рис. 7.348).

Решение:

Диагональ ромба является биссектрисой его угла. Поэтому в ΔABP ($BK \perp AD$) по свойству биссектрисы: $\dfrac{BK}{KP} = \dfrac{AB}{AP} = \dfrac{75}{21} = \dfrac{25}{7}$; $AB : AP = 25 : 7$.

Пусть $AB = 25x$, тогда $AP = 7x$.

По теореме Пифагора $BP = \sqrt{(25x)^2 - (7x)^2} = 24x$. $24x = 75 + 21$; $x = 4$.

$AD = AB = 25 \cdot 4 = 100$ см; $BP = 75 + 21 = 96$ см. $S_{\text{р}} = BP \cdot AD = 96 \cdot 100 = 9\,600$ (см²).

Ответ: 9 600 см².

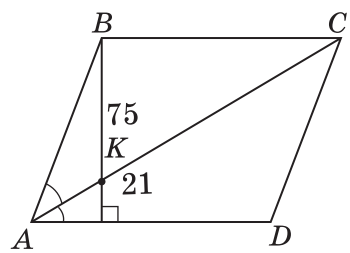


Рис. 7.348

7.5.6. Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту (рис. 7.349):

$$\boxed{S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2} \cdot h}$$

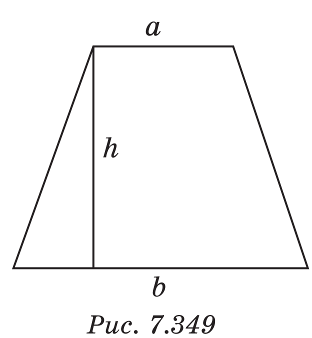


Рис. 7.349

Следствия:

1. Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту (рис. 7.350):

$$\boxed{S_{\text{тр}} = m \cdot h}$$

где $m = \dfrac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции.

В частности, в равнобокой трапеции, где высота делит большее основание на отрезки m и n (рис. 7.351):

$$\boxed{m = \frac{a+b}{2};\ \ n = \frac{b-a}{2};\ S_{\text{тр}} = m \cdot h}$$

где m — больший из отрезков, на которые высота делит большее основание.

2. Площадь трапеции можно найти как произведение боковой стороны на длину перпендикуляра, опущенного на нее из середины другой боковой стороны (рис. 7.352):

$$\boxed{S_{\text{тр}} = MN \cdot CD}$$

3. Пусть a и b — основания трапеции, а отрезок $MN \parallel BC \parallel AD$ такой, что делит площадь трапеции пополам (рис. 7.353), тогда:

$$\boxed{KL = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};\ S_{AKLD} = S_{KBCL}}$$

4. Если в равнобокой трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а высота трапеции равна h (рис. 7.354), то:

$$\boxed{S_{\text{тр}} = h^2}$$

Задача 1. Основания равнобокой трапеции 50 см и 14 см, диагональ равна 40 см. Найти площадь трапеции (рис. 7.355).

Решение:

$$BK \perp AD,\ KD = \frac{BC + AD}{2} = \frac{14+50}{2} = 32.$$

По теореме Пифагора:

$$BK^2 = 40^2 - 32^2 = 24^2;\ BK = 24.\ S_{\text{тр}} = BK \cdot KD = 24 \cdot 32 = 768\ (\text{см}^2).$$

Ответ: 768 см^2.

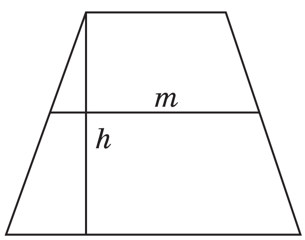


Рис. 7.350

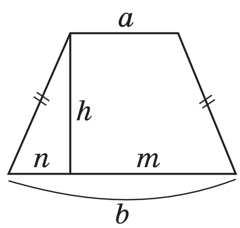


Рис. 7.351

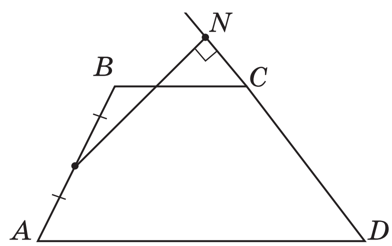


Рис. 7.352

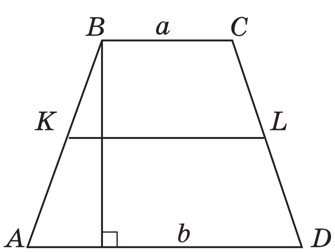


Рис. 7.353

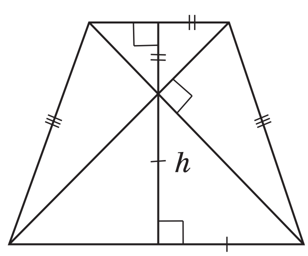


Рис. 7.354

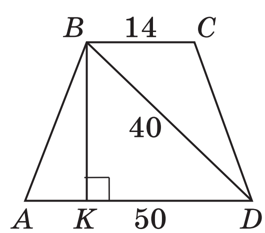


Рис. 7.355

Задача 2. Основания равнобокой трапеции равны 13 см и 37 см. Диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

Решение:

Проведем высоту MN через точку пересечения диагоналей — точку O (рис. 7.356).

ΔBOC и ΔAOD — равнобедренные прямоугольные, тогда и ΔOMC и ΔOND — равнобедренные прямоугольные ($\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 45°$).

$$OM = MC,\ ON = ND, \text{ тогда:}$$

$$MN = MO + ON = \frac{BC + AD}{2} = \frac{13 + 37}{2} = 25.$$

Площадь такой трапеции:

$$S_{\text{тр}} = MN^2 = 25^2 = 625 \text{ (см}^2\text{)}.$$

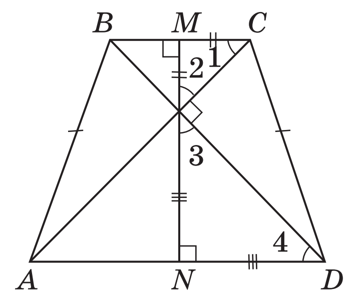


Рис. 7.356

Ответ: 625 см^2.

Задача 3. Основания трапеции 8 см и 42 см, диагонали 30 см и 40 см. Найти площадь трапеции (рис. 7.357).

Решение:

Проведем $CD_1 \parallel BD$, получим точку D_1 — точку пересечения CD_1 и продолжения стороны AD. Получим: параллелограмм $DBCD_1$; $BD = CD_1 = 40$; $BC = DD_1 = 8$ и треугольник ΔACD_1 со сторонами $AC = 30$, $CD_1 = 40$ и $AD_1 = 42 + 8 = 50$. Этот треугольник — прямоугольный по теореме, обратной к теореме Пифагора ($50^2 = 30^2 + 40^2$). Найдем высоту этого треугольника (она же высота трапеции).

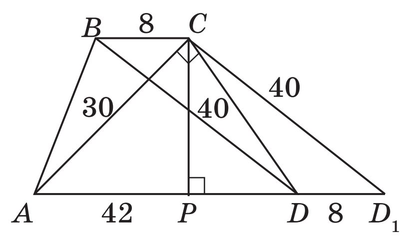


Рис. 7.357

В прямоугольном треугольнике:

$$CP \cdot AD_1 = AC \cdot CD_1, \text{ тогда:}$$

$$CP = \frac{AC \cdot CD_1}{AD_1} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24 \text{ (см)}. \quad S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CP = \frac{8 + 42}{2} \cdot 24 = 600 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 600 см^2.

Задача 4. Боковые стороны и высота трапеции соответственно равны 25 см, 30 см и 24 см. Биссектрисы острых углов пересекаются на меньшем основании. Найти площадь трапеции.

Решение:

ΔABK и ΔKCD — равнобедренные ($\angle 1 = \angle 2$ — биссектриса, $\angle 2 = \angle 3$ — внутренние накрест лежащие, $\angle 1 = \angle 3$, аналогично $\angle 5 = \angle 6$) (рис. 7.358).

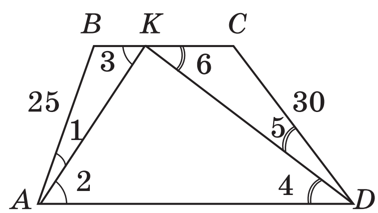


Рис. 7.358

$$AB = BK = 25;\ KC = CD = 30, \text{ тогда:}$$

$$BC = 25 + 30 = 55 \text{ (см)}.$$

Проведем высоты (рис. 7.359). $BM = CN = 24$ (см).

Из ΔABM: $AM^2 = 25^2 - 24^2 = 7^2$; $AM = 7$.

Из ΔCND: $ND^2 = 30^2 - 24^2 = 18^2$; $MD = 18$.

$$AD = AM + MN + ND = 7 + 55 + 18 = 70 \text{ (см)},$$

$$BC = MN.$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{(BC + AD) \cdot BM}{2} = \frac{(55 + 70) \cdot 24}{2} = 1500 \text{ (см}^2\text{)}.$$

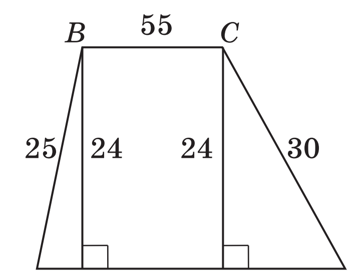


Рис. 7.359

Ответ: 1500 см^2.

7.5.7. Площадь треугольника

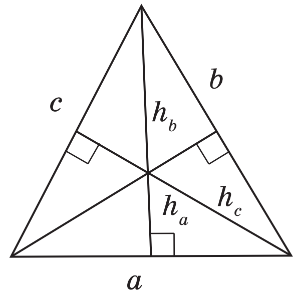


Рис. 7.360

Площадь треугольника (рис. 7.360; 7.361) вычисляется по формулам:

1. $$\boxed{S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c}$$

2. $$\boxed{S = \frac{1}{2}b\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta}$$

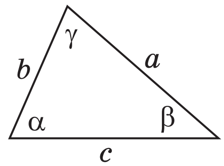


Рис. 7.361

Следствие. Стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Это означает, что чем **больше** сторона треугольника, тем **меньше** высота, проведенная к ней.

3. **Формула Герона** (нахождение площади по трем сторонам треугольника) (рис. 7.362):

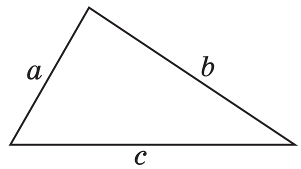


Рис. 7.362

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, или

$$\boxed{S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

4. Площадь треугольника можно найти, если известны радиусы описанной и вписанной окружностей R и r:

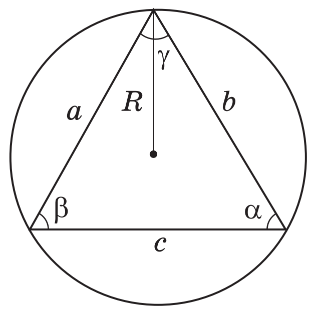


Рис. 7.363

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R} \text{ или } S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

R — радиус описанной окружности.

5. Площадь треугольника можно найти, если известен радиус вписанной окружности (рис. 7.364):

$$\boxed{S = p \cdot r}$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, r — радиус вписанной окружности.

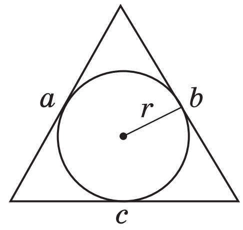


Рис. 7.364

6. Площадь равностороннего (правильного) треугольника со стороной a:

$$\boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

Площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b, гипотенузой c и высотой h (рис. 7.365):

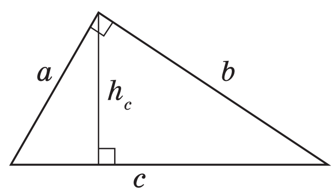


Рис. 7.365

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab;\ S = \frac{1}{2}ch_c;\ S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta}$$

Дополнительные формулы для нахождения площади треугольника:

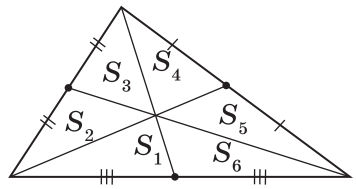


Рис. 7.366

1. Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих (имеющих одинаковую площадь) треугольников (рис. 7.366):

$$\boxed{S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6}$$

Следствия:

а) Отрезки, соединяющие центр масс треугольника с его вершинами, делят его на три равновеликие части.

б) Медиана треугольника делит его площадь пополам.

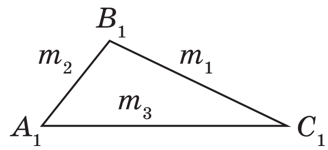


Рис. 7.367

2. Площадь треугольника, образованного медианами данного треугольника, составляет $\frac{3}{4}$ площади этого треугольника (рис. 7.367; 7.368):

$$\boxed{S_{A_1B_1C_1} = \frac{3}{4} S_{ABC}}$$

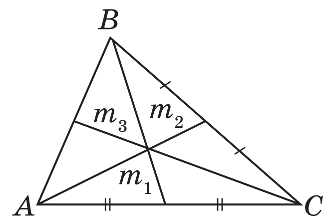


Рис. 7.368

Если известны медианы треугольника m_1, m_2 и m_3, то его площадь можно найти по формуле:

$$\boxed{S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)(-m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2 + m_3)(m_1 + m_2 - m_3)}}$$

3. Если h_1, h_2 и h_3 — высоты треугольника, то его площадь можно найти по формуле:

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)\left(-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right)}}}$$

Метод площадей — это метод, при котором, выражая площадь фигуры двумя разными способами, можно получить равенство, которое связывает основные элементы фигуры.

Например, найдем этим методом высоту треугольника, если известны три его стороны:

$$S = \frac{ah_a}{2} \text{ или } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$, тогда $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$.

Задача 1. Найти наименьшую высоту в треугольнике со сторонами 12, 39 и 45.

Решение:

Наименьшая высота будет проведена к наибольшей стороне, т. е. к стороне, равной 45 (рис. 7.369).

Найдем полупериметр:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+39+45}{2} = 48.$$

Найдем площадь по формуле Герона:

$$S = \sqrt{48(48-12)(48-39)(48-15)} = 216.$$

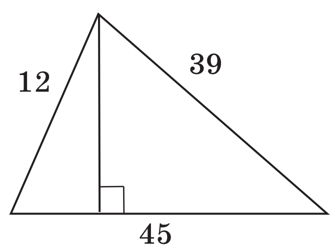


Рис. 7.369

Тогда высота, проведенная к стороне, равной 45: $h = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2 \cdot 216}{45} = 9,6.$

Ответ: 9,6.

Задача 2. Перпендикуляр, проведенный из середины основания к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит ее на отрезки 18 см и 32 см, считая от вершины, противолежащей основанию. Найти площадь прямоугольника (рис. 7.370).

Решение:

ΔBDC — прямоугольный ($BD \perp AC$, $DK \perp BC$). По свойству пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике: $DC^2 = CK \cdot CB = 32 \cdot (32 + 18) = 32 \cdot 50 = 1600$; $CD = 40$; $BD^2 = BK \cdot BC = 18 \cdot 50 = 900$; $BD = 30$. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{BD \cdot AC}{2} = BD \cdot DC = 30 \cdot 40 = 1200$ (см^2).

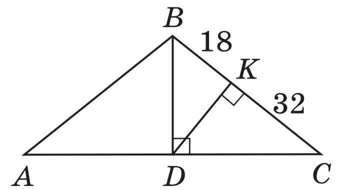


Рис. 7.370

Ответ: 1200 см^2.

Задача 3. Диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 8 см, а катет — 24 см. Найти площадь треугольника.

Решение:

Диаметр вписанной окружности 8 см, т. е. радиус равен 4 см. $OM = OK = MC = CK = 4$ см, т. к. $CMOK$ — квадрат (рис. 7.371).

По теореме о двух касательных, выходящих из одной точки: $BK = BN = 20$ ($BK = 24 - 4 = 20$).

Пусть $AM = AN = x$. Получаем ΔABC со сторонами: $AC = x + 4$; $BC = 24$; $AB = x + 20$. По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $(x + 20)^2 = (x + 4)^2 + 24^2$; $x = 6$. Тогда $AC = 6 + 4 = 10$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ (см}^2\text{)}.$$

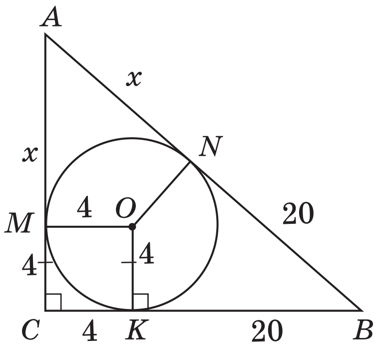


Рис. 7.371

Ответ: 120 см^2.

Задача 4. Боковые стороны треугольника равны 25 см и 40 см, высота, проведенная к основанию, — 24 см. Найти площади частей треугольника, на которые его делит биссектриса, проведенная к основанию (рис. 7.372).

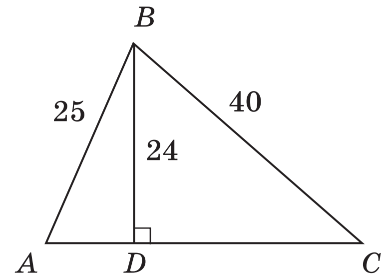


Рис. 7.372

Решение:

$BD \perp AC$. ΔABD и ΔDBC — прямоугольные, тогда

$$AD^2 = AB^2 - AD^2 = 25^2 - 24^2 = 7^2;\ AD = 7;$$

$$DC^2 = BC^2 - DC^2 = 40^2 - 24^2 = 32^2;\ DC = 32.$$

$$AC = 7 + 32 = 39 \text{ (см)}.$$

Пусть биссектриса BK делит ΔABC на треугольники ABK и KBC (рис. 7.373).

Чтобы найти площади этих треугольников, нужно найти длины отрезков AK и KC. Пусть $AK = c$, тогда $KC = 39 - x$. По свойству биссектрисы:

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8};\ \frac{AK}{KC} = \frac{5}{8};\ \frac{x}{39 - x} = \frac{5}{8};$$

$8x = 5(39 - x)$; $x = 15$; $AK = 15$; $KC = 39 - 15 = 24$.

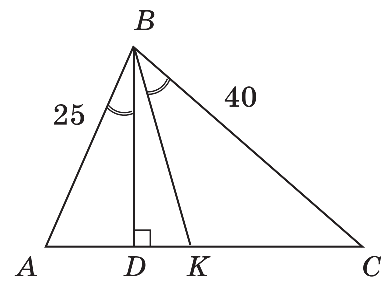


Рис. 7.373

$$S_{\Delta ABK} = \frac{AK \cdot BD}{2} = \frac{15 \cdot 24}{2} = 180 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\Delta KBC} = \frac{KC \cdot BD}{2} = \frac{24 \cdot 24}{2} = 288 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 180 см^2 и 288 см^2.

7.5.8. Площадь круга. Площадь сектора

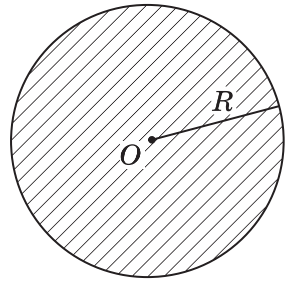


Рис. 7.374

Круг — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки **не больше** данного. Эта точка называется **центром** круга, расстояние — **радиусом** круга (рис. 7.374).

Другими словами, круг — это часть плоскости внутри окружности, включая точки самой окружности.

Площадь круга вычисляется по формуле:

$$\boxed{S_{\text{кр}} = \pi R^2 \text{ или } \frac{\pi D^2}{4}}$$

где R — радиус круга, D — его диаметр.

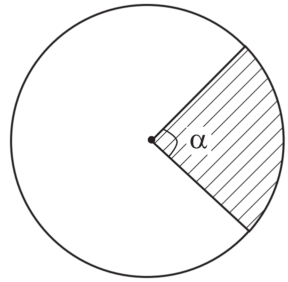


Рис. 7.375

Круговой сектор — часть круга внутри соответствующего центрального угла (рис. 7.375).

Площадь **кругового сектора** вычисляется по формуле:

$$\boxed{S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}}$$

где α° — градусная мера соответственного центрального угла.

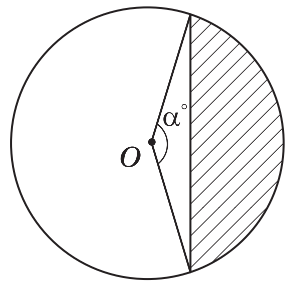


Рис. 7.376

Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости (рис. 7.376). Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

$$\boxed{S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ \pm S_{\Delta}}$$

где α° — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента;
S_{Δ} — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «−» надо брать, если $\alpha^\circ < 180^\circ$, а знак «+», если $\alpha^\circ > 180^\circ$ (рис. 7.377).

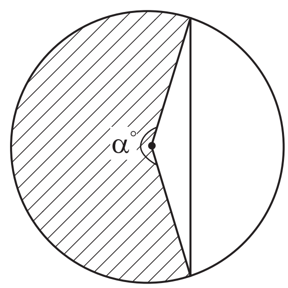


Рис. 7.377

Задача 1. Найти площадь круга, описанного около квадрата со стороной a (рис. 7.378).

Решение:

Радиус описанной окружности:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{2}$.

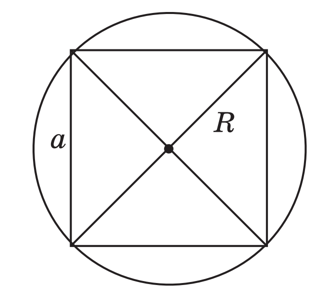


Рис. 7.378

Задача 2. Найти площадь круга, вписанного в правильный треугольник, если его сторона $a = 2\sqrt{3}$ (рис. 7.379).

Решение:

Радиус вписанного круга: $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6} = 1.$

Тогда площадь круга: $S = \pi r^2 = \pi.$

Ответ: π см^2 $\approx 3{,}14$ см^2.

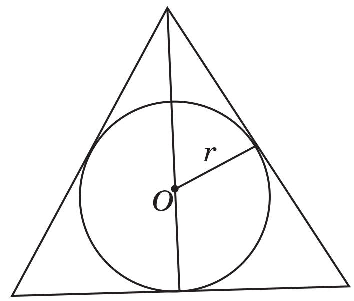


Рис. 7.379

Задача 3. Вокруг круглой клумбы, радиус которой 4 м, проложена дорожка шириной 1 м. Сколько нужно песка, чтобы посыпать дорожку, если на 1 м^2 дорожки требуется 0,9 дм^3 песка?

Решение:

Дорожка представляет собой кольцо, образованное концентрическими окружностями с радиусами $R_1 = 4$ м и $R_2 = 5$ м (рис. 7.380).

Площадь кольца:

$$S_{\text{к}} = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2) =$$
$$= \pi(5^2 - 4^2) = 9\pi \approx 28{,}26 \text{ м}^2.$$

Тогда для этой дорожки понадобится: $28{,}26 \cdot 0{,}9 = 25{,}434$ (дм^3), т. е. 26 дм^3 песка хватит, чтобы посыпать эту дорожку.

Ответ: 26 дм^3.

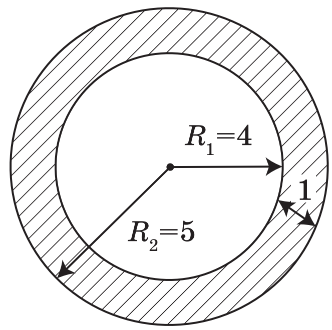


Рис. 7.380

Задача 4. Площадь круга равна $\dfrac{121}{\pi}$. Найти длину окружности.

Решение:

$$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \frac{121}{\pi};\quad R^2 = \frac{121}{\pi^2};\quad R = \frac{11}{\pi};$$
$$C = 2\pi R = 2\pi\cdot\frac{11}{\pi} = 22.$$

Ответ: 22.

Задача 5. Найти площадь сектора круга радиуса $\dfrac{18}{\sqrt{\pi}}$ см, центральный угол которого равен $120°$ (рис. 7.381).

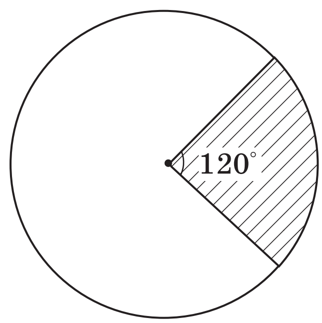


Рис. 7.381

Решение:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2\cdot\alpha°}{360°} = \frac{\pi\left(\dfrac{18}{\sqrt{\pi}}\right)^2\cdot 120°}{360°} = \frac{324}{3} = 108 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 108 см^2.

Задача 6. Клумба представляет собой квадрат размером 3×3 м. Сектор с дугой $90°$ засадили тюльпанами, остальное — нарциссами. Найти площадь, засаженную нарциссами (рис. 7.382).

Решение:

$$S_{\text{н}} = S_{\text{кв}} - S_{\text{сект}} = 3^2 - \frac{\pi R^2}{4} = 9 - \frac{3{,}14\cdot 9}{4} \approx 2 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Ответ: 2 м^2.

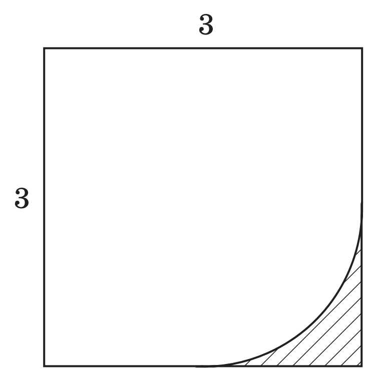


Рис. 7.382

7.5.9. Формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба, шара

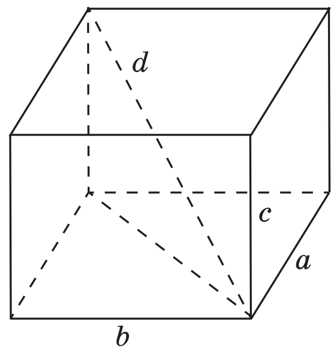


Рис. 7.383

Прямоугольный параллелепипед — это объемная фигура, у которой шесть граней, каждый из которых является прямоугольником (рис. 7.383).

Примерами прямоугольных параллелепипедов служат спичечная коробка, комната и т. д.

Длины трех ребер, выходящих из одной точки — вершины, называют **измерениями** параллелепипеда: a, b и c.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

$$\boxed{V_{\text{пар}} = abc}$$

Площадь поверхности параллелепипеда:

$$\boxed{S_{\text{пов}} = 2(ab + bc + ac)}$$

Квадрат диагонали d прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

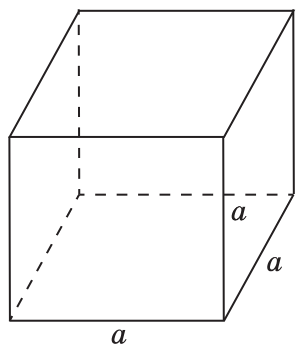


Рис. 7.384

Прямоугольный параллелепипед с **равными измерениями** называется **кубом** (рис. 7.384).

Все шесть граней куба — равные квадраты.

Объем куба равен кубу его стороны:

$$\boxed{V_{\text{куб}} = a^3; \quad S_{\text{пов}} = 6a^2}$$

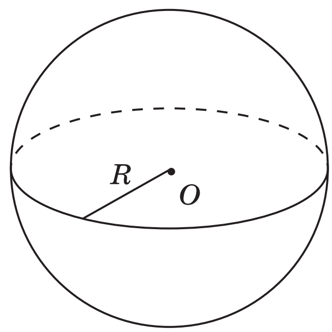


Рис. 7.385

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки (рис. 7.385).

Данная точка (точка O) называется **центром сферы**, а данное расстояние — **радиусом сферы**. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, называется **диаметром сферы**:

$$D = 2R.$$

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**. Центр, радиус и диаметр шара являются и центром, радиусом и диаметром сферы.

$$\boxed{S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2; \; V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Задача 1. Отношение площадей поверхностей двух сфер равно 9. Чему равно отношение его объемов?

Решение:

$$\frac{S_{\text{сф.1}}}{S_{\text{сф.2}}} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = 9; \text{ т. е. } \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 9, \text{ то } \frac{R_1}{R_2} = 3. \text{ Тогда } \frac{V_{\text{шара 1}}}{V_{\text{шара 2}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

Задача 2. Сколько кожи пойдет на изготовление покрышки футбольного мяча радиуса 8 см (на швы добавляется 10 % от площади поверхности мяча)?

Решение:

Найдем площадь поверхности сферы $R = 8$ и добавим 10 % = 0,1 на швы, т. е.

$$S_{\text{мяча}} = 4\pi R^2 + 0{,}1 \cdot 4\pi R^2 = 4{,}1 \cdot \pi \cdot R^2 = 4{,}1 \cdot 3{,}14 \cdot 8^2 \approx 824 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 824 см^2.

Задача 3. Сечение шара плоскостью, удаленной от центра на 12 см, имеет площадь 25π см^2. Найти объем шара.

Решение:

Пусть шар пересекли плоскостью (рис. 7.386). В сечении получился круг радиуса r. Расстояние $d = 12$ (расстояние — это перпендикуляр, проведенный из центра шара к этой плоскости).

$$R^2 = d^2 + r^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2;\ R = 13.$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 13^3 = \frac{8\,788\pi}{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

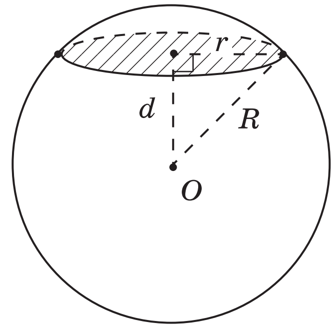


Рис. 7.386

Ответ: $\dfrac{8788\pi}{3}$ см^3.

Задача 4. Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если стороны его основания 6 см и 8 см, а диагональ наклонена к плоскости основания под углом 45° (рис. 7.387).

Решение:

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. $AD = 6$ см; $DC = 8$ см. $\angle BDB_1 = 45°$.

По теореме Пифагора из ΔABD: $BD = 10$ см, но $\angle BDB_1 = 45°$, тогда ΔB_1BD — равнобедренный прямоугольный и $BB_1 = 10$.

$$V_{\text{пар}} = BB_1 \cdot AD \cdot DC = 10 \cdot 6 \cdot 8 = 480 \text{ (см}^3\text{)}.$$

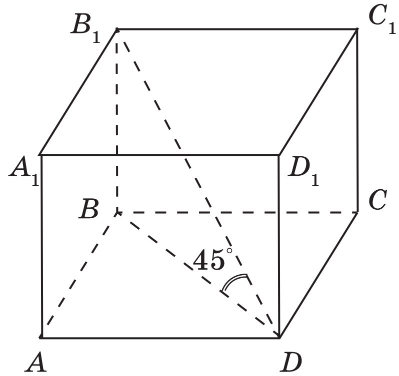


Рис. 7.387

Ответ: 480 см^3.

Задача 5. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 18 см, 12 см и 8 см. Найти ребро равновеликого ему куба (т. е. куба, имеющего такой же объем).

Решение:

$$V_{\text{пар}} = abc = 18 \cdot 12 \cdot 8 = 9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8 = 27 \cdot 8 \cdot 8.$$

$$V_{\text{куба}} = 27 \cdot 8 \cdot 8 = a^3,\ a = \sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 8} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12 \text{ (см)}.$$

Ответ: 12 см.

Задача 6. Площадь поверхности куба 150 м^2. Найти его объем и диагональ.

Решение:

$$S_{\text{куба}} = 6a^2 = 150 \text{ м}^2, \text{ тогда } a^2 = 150 : 6 = 25;\ a = 5.$$

$$V_{\text{куба}} = a^3 = 5^5 = 125. \text{ Диагональ } d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 = 3 \cdot 25 = 75;\ d = 5\sqrt{3}.$$

Ответ: 125 м^3 и $5\sqrt{3}$ м.

Задача 7. Комната имеет размеры 5 м, 4 м и 3,2 м. Вычислить площадь стен, на которые необходимо поклеить обои, если площадь окон и дверей составляет 0,2 площади стен.

Решение:

Очевидно, что данные 5 м, 4 м и 3,2 м показывают, что высота комнаты 3,2 м. Оклеивать будут только стены, т. е. две стены $5 \cdot 3{,}2$ и $4 \cdot 3{,}2$.

$$S = 5 \cdot 3{,}2 + 4 \cdot 3{,}2 = 9 \cdot 3{,}2 = 28{,}8 \text{ м}^2.$$

Окна и двери составляют 0,2 площади, т. е. оклеиваемая площадь равна $0{,}8S$, т. е. $S = 0{,}8 \cdot 28{,}8 = 23{,}04$ (м^2).
Ответ: 23,04 м^2.

7.6. Векторы на плоскости

7.6.1. Вектор, длина (модуль) вектора

Если некоторая величина полностью характеризуется своим числовым значением, то ее называют **скалярной**, или **скаляром**. Например, скалярными являются величины: *масса*, *температура*, *длина*, *площадь*, *объем*.

Множество физических величин имеют не только числовое значение, но и направление. Такие величины называют **векторными**, или **векторами**.

Например, векторами являются: *скорость*, *сила*, *давление* и т. д.

Вектор — это направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какой из концов отрезка является началом, а какой — концом.

Векторы обозначают:

а) двумя большими буквами латинского алфавита: $\overline{AB}$, $\overline{KF}$, $\overline{CD}$, причем первая буква обозначает начало, а вторая — конец вектора (рис. 7.388);

б) маленькими буквами латинского алфавита: $\overline{a}$, $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{0}$ (рис. 7.389).

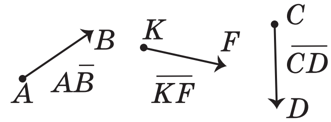


Рис. 7.388

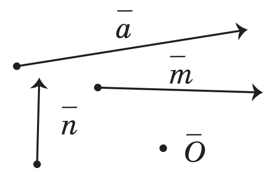


Рис. 7.389

$\overline{0}$ — нулевой вектор, его начало и конец совпадают.

Абсолютной величиной (модулем) вектора $\overline{a}$ называется длина отрезка, который изображает вектор. Обозначается: $|\overline{a}|$.

Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю: $|\overline{0}| = 0$.

Задача 1. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 6$, $BC = 8$. M — середина стороны AB. Найти длины векторов: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{MC}$, $\overline{MA}$, $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ (рис. 7.390).

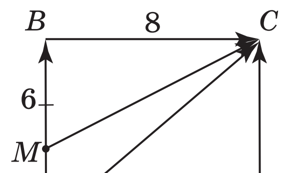


Рис. 7.390

Решение:

Очевидно, что $|\overline{AB}| = 6$, $|\overline{BC}| = 8$, $|\overline{DC}| = 6$.

Поскольку $AM = MB = 3$, то $|\overline{MC}| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$.

$|\overline{MA}| = \dfrac{1}{2}|\overline{AB}| = 3$; $|\overline{CB}| = |\overline{BC}| = 8$; $|\overline{AC}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Задача 2. В трапеции $MNKP$ ($MP \parallel NK$) $\angle M = 90°$, $\angle P = 45°$, $MP = 8$, $MN = 6$. Найти длины векторов: $\overline{NP}$, $\overline{KP}$, $\overline{MK}$, $\overline{NK}$ (рис. 7.391).

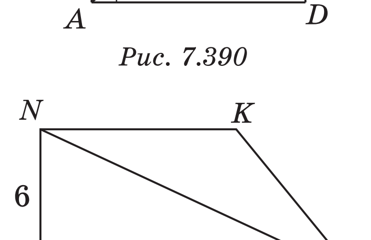


Рис. 7.391

Решение:

$|\overline{NP}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Проведем $KA \perp MP$ (рис. 7.392).

ΔKAP — равнобедренный прямоугольный, т. к. $\angle P = 45°$, $KA \perp MP$, $KA = AP = 6$.

$$|\overline{KP}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2};\ MA = MP - AP = 8 - 6 = 2.$$

$$|\overline{MK}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10};\ |\overline{NK}| = 2.$$

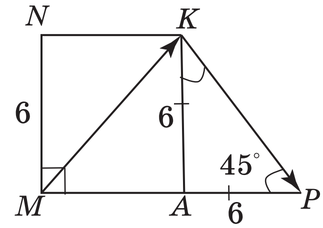


Рис. 7.392

7.6.2. Равенство векторов

Пусть $a \parallel b \parallel c$, где a, b и c — прямые. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору (рис. 7.393).

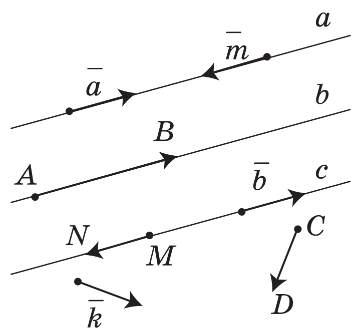


Рис. 7.393

Векторы $\overline{a}$, $\overline{m}$, $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ и $\overline{b}$ — коллинеарны, а векторы $\overline{k}$ и $\overline{DC}$ им неколлинеарны.

Коллинеарные векторы могут быть **направлены одинаково** или **сонаправлены**: $\overline{a}$, $\overline{AB}$, $\overline{b}$ или $\overline{m}$, $\overline{MN}$, а могут быть **противоположно направлены**: $\overline{a}$ и $\overline{m}$; $\overline{AB}$ и $\overline{MN}$.

Векторы называются **равными**, если они **сонаправлены и их длины равны** (рис. 7.394).

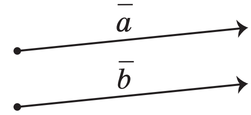


Рис. 7.394

Задача 1. В данном параллелограмме $ABCD$ выбрать пары равных векторов: $\overline{AB}$, $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{OC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BO}$, $\overline{OD}$ (рис. 7.395).

Ответ: равны следующие пары векторов:

а) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$; б) $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$;

в) $\overline{AO}$ и $\overline{OC}$; г) $\overline{BO}$ и $\overline{OD}$.

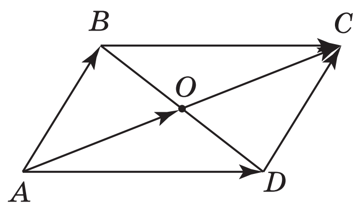


Рис. 7.395

От любой точки A можно отложить вектор, равный данному вектору $\overline{a}$, и притом только один.

Равенство векторов можно рассмотреть более наглядно, если определить понятие координаты векторов (рис. 7.396).

Координатами вектора $\overline{AB}$ с началом в точке $A(x_1;\ y_1)$ и концом $B(x_2;\ y_2)$ называется число $a_1 = x_2 - x_1$ и $a_2 = y_2 - y_1$. $\overline{AB}(a_1;\ a_2)$.

Если вектор задан координатами точек начала и конца, то он имеет строго фиксированные координаты. $A(1;\ 1)$, $B(-2;\ 3)$. $\overline{AB}(-2 - 1;\ 3 - 1)$; $\overline{AB}(-3;\ 2)$.

Если векторы заданы своими координатами, т. е. $\overline{a}(-1;\ 3)$; $\overline{b}(0;\ -4)$; $\overline{c}(3;\ -3)$; $\overline{d}(1;\ 0)$, то их можно откладывать от любой точки.

Абсолютная величина вектора $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ вычисляется по формуле:

$$\boxed{|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

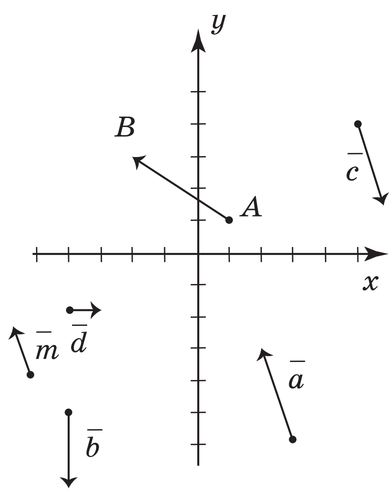


Рис. 7.396

Равные векторы имеют ранвые координаты.

Например, $\overline{m} = \overline{a}$, т. к. $\overline{m}(-1; 3)$ и $\overline{a}(-1; 3)$.

Найдем модули этих векторов: $|\overline{m}| = |\overline{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

То есть верно и обратное утверждение: **если равны координаты векторов, то векторы равны, т. е. равны их модули и они сонаправлены**.

Задача 1. $ABCD$ — трапеция, $AM = MB = CN = ND$ (рис. 7.397). Равны ли векторы: а) $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$; б) $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$; в) $\overline{MB}$ и $\overline{NC}$; г) $\overline{AK}$ и $\overline{BC}$, если $CK \parallel AB$; д) $\overline{AB}$ и $\overline{CK}$?

Решение:

а) $\overline{BC} \neq \overline{AD}$, т. к. они не равны по модулю.

б) $\overline{AM} = \overline{MB}$, они равны по модулю и лежат на одной прямой.

в) $\overline{MB} \neq \overline{NC}$, они равны по модулю, но не сонаправлены.

г) $\overline{AK} = \overline{BC}$, равны по модулю и сонаправлены.

д) $\overline{AB} \neq \overline{CK}$, они противоположно направлены.

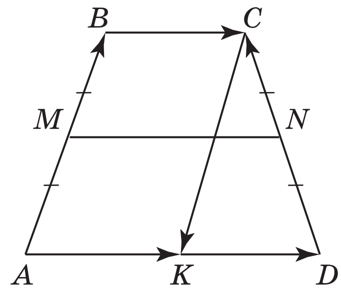


Рис. 7.397

Задача 2. Даны точки: $A(1; -3)$, $B(2; 4)$, $C(5; 4)$, $D(4; -3)$. Среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ найти равные.

Решение:

Найдем координаты этих векторов:

$$\overline{AB}(2-1; 4-(-3)); \quad \overline{AB}(1; 7); \quad \overline{DC}(5-4; 4-(-3)); \quad \overline{DC}(1; 7);$$

$$\overline{AC}(5-1; 4-(-3)); \quad \overline{AC}(4; 7); \quad \overline{BC}(5-1; 4-4); \quad \overline{BC}(4; 0).$$

Ответ: равны векторы $\overline{AB}(1; 7)$ и $\overline{DC}(1; 7)$.

Задача 3. Даны точки $M(x; 2)$ и $N(-3; y)$. При каких значениях x и y вектор $\overline{MN}$ будет равен вектору $\overline{a}(-4; 0)$?

Решение:

Найдем координаты вектора $\overline{MN}$: $\overline{MN}(-3-x; y-2)$.

Поскольку $\overline{MN} = \overline{a}$, равны их координаты, т. е.:

$$-3 - x = -4; \ x = 1 \text{ и } y - 2 = 0; \ y = 2.$$

Ответ: при $x = 1$, $y = 2$.

7.6.3. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число)

Для векторов определены операции сложения, вычитания и умножения на число, результатом этих действий тоже будет вектор.

Сложение векторов

Суммой векторов $\overline{a}(a_1; a_2)$ и $\overline{b}(b_1; b_2)$ называется вектор $\overline{c}(c_1; c_2)$ с координатами: $c_1 = a_1 + b_1$ и $c_2 = a_2 + b_2$.

То есть $\overline{(a_1; a_2)} + \overline{(b_1; b_2)} = \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2)}$.

Например, если $\overline{a}(-3; 5)$ и $\overline{b}(1; -8)$, то $\overline{c}\overline{(-3+1; 5-8)} = \overline{(-2; -3)}$, $\overline{c}(-2; -3)$.

Изображение вектора-суммы можно получить с помощью правила треугольника и правила параллелограмма.

Правило треугольника

Для любых точек A, B и C имеет место векторное равенство: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

По **правилу треугольника** получаем следующий способ сложения векторов:

Пусть даны два вектора (рис. 7.398):

а) от произвольной точки строим вектор $\overline{a}$;

б) от конца вектора $\overline{a}$ отложим вектор $\overline{b}$;

в) вектор-сумма $\overline{c}$ — его начало совпадает с началом вектора $\overline{a}$ и конец — с концом вектора $\overline{b}$ (рис. 7.399).

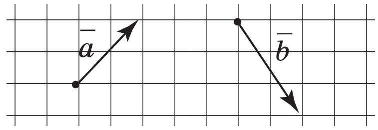


Рис. 7.398

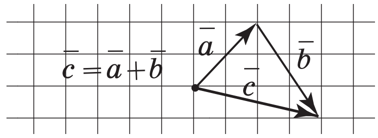


Рис. 7.399

Правило многоугольника:

Пусть даны векторы $\overline{a}$; $\overline{b}$; $\overline{c}$; $\overline{d}$ (рис. 7.400):

а) от произвольной точки строим вектор $\overline{a}$;

б) от конца вектора $\overline{a}$ строим вектор $\overline{b}$;

в) от конца вектора $\overline{b}$ строим вектор $\overline{c}$;

г) от конца вектора $\overline{c}$ строим вектор $\overline{d}$;

д) вектор-сумма $\overline{m}$ — его начало совпадает с началом вектора $\overline{a}$, конец — с концом вектора $\overline{d}$ (рис. 7.401).

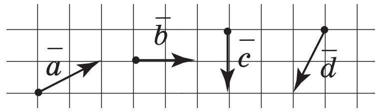


Рис. 7.400

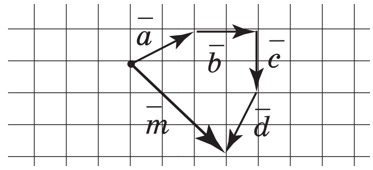


Рис. 7.401

Правильность построения можно проверить, сложив координаты этих векторов:

$$
+\begin{array}{l}
\overline{a}(2;\,1)\\
\overline{b}(2;\,0)\\
\overline{c}(0;\,-2)\\
\underline{\overline{d}(-1;\,-2)}\\
\overline{m}(3;\,-3).
\end{array}
$$

По рисунку видно, что координаты $\overline{m}(3;\,-3)$.

Правило параллелограмма

Если неколлинеарные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выходят из одной точки (или их параллельно перенести в одну точку), то сумма этих векторов — диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 7.402).

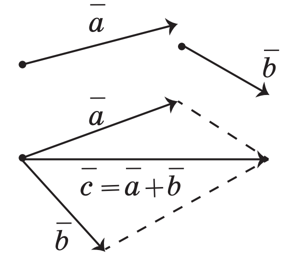


Рис. 7.402

Вектор-сумма выходит из той же точки, что и векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Например, сложим векторы $\overline{a}(4;\,2)$ и $\overline{b}(-3;\,-4)$ (рис. 7.403). По правилу параллелограмма должны получить вектор: $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}=(\overline{4-3;\,2-4})=(\overline{1;\,-2})$.

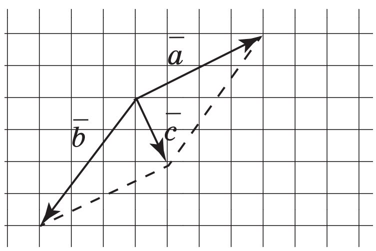


Рис. 7.403

Законы сложения векторов

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a};\quad \overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a};\quad \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}.$$

Разность векторов

Разностью векторов $\overline{a}(a_1;\,a_2)$ и $\overline{b}(b_1;\,b_2)$ называется вектор $\overline{c}(a_1;\,a_2)$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$, т. е. $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$; $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ (рис. 7.404).

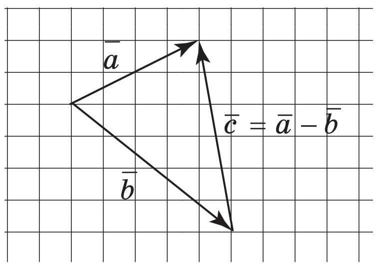


Рис. 7.404

Например, $\overline{a}(4;\ 2)$; $\overline{b}(5;\ -4)$, тогда $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b} = \overline{(4-5;\ 2-(-4))} = \overline{(-1;\ 6)}$.

Чтобы построить вектор-разность двух векторов, необходимо:

а) отложить равные им векторы из одной точки;

б) вектор, начало которого совпадает с вектором $\overline{b}$, а конец — с концом вектора $\overline{a}$, и будет разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Операции сложения и вычитания векторов широко применяют в физике для **сложения сил**.

Сложение сил

Для сложения нескольких сил достаточно знать правило сложения двух сил, т. к. сложение нескольких сил можно провести последовательно применением этого правила.

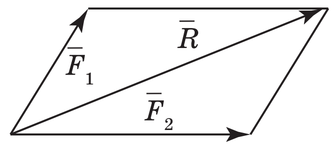


Рис. 7.405

Сложение сил приложенных к одной точке

Равнодействующая двух сил $\overline{R}$ (т. е. вектор-сумма) по величине и направлению равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 7.405).

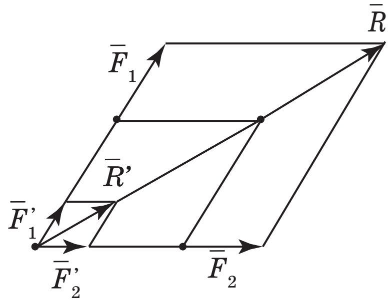


Рис. 7.406

Сложение двух сил, линии действия которых пересекаются

Аналогично сложению двух сил, приложенных к одной точке: перенесем параллельно $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ в одну точку, равнодействующая $\overline{R}$ лежит на диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{F_1'}$ и $\overline{F_2'}$ (рис. 7.406).

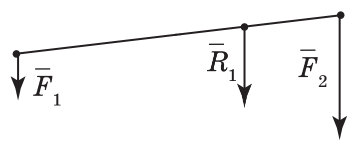
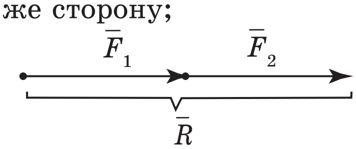


Рис. 7.407

Равнодействующая двух сил, действующая по прямой

а) в одну сторону — равна сумме сил и направлена в ту же сторону;



$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$

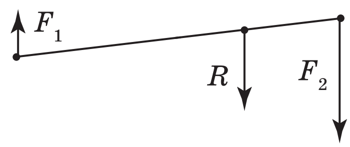
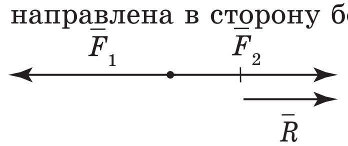


Рис. 7.408

б) в противоположные стороны — равна разности сил и направлена в сторону большей силы;



$\overline{R} = \overline{F}_2 - \overline{F}_1$

Сложение двух параллельных сил

$\overline{R} = \overline{F_1} \pm \overline{F_2}$ и делит отрезок между точками приложения сил, внутренним или внешним образом, на части, обратно пропорциональные этим силам (рис. 7.407, 7.408).

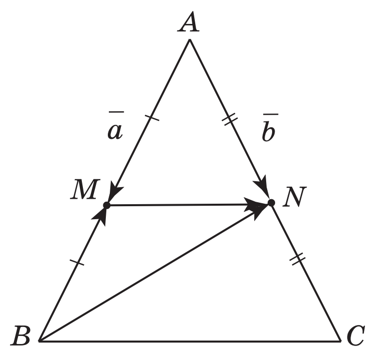


Рис. 7.409

Задача 1. Точки M и N — середины сторон AB и AC ΔABC. Выразить векторы $\overline{BM}$, $\overline{NC}$, $\overline{MN}$ и $\overline{BN}$ через векторы $\overline{AM} = \overline{a}$ и $\overline{AN} = \overline{b}$ (рис. 7.409).

Решение:

а) $\overline{BM} = -\bar{a}$;

б) $\overline{NC} = \bar{b}$;

в) $\overline{MN} = \bar{b} - \bar{a}$;

г) $\overline{BN} = \overline{MN} + \overline{BM} = (\bar{b} - \bar{a}) - \bar{a}$.

Задача 2. Парашютист спускается на землю со скоростью 5 м/с, но порывом ветра его начинает уносить в сторону со скоростью $5\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к вертикали спускается парашютист?

Решение:

Пусть под действием силы тяжести $\overline{P}$ парашютист спускается на землю со скоростью 5 м/с, пусть $\overline{BA} = 5$ (рис. 7.410). Сила ветра $\overline{F}$ направлена перпендикулярно силе $\overline{P}$, тогда $|\overline{BC}| = 5\sqrt{3}$ (рис. 7.411) Равнодействующая сила $\overline{R}$ направлена по диагонали $\overline{BD}$.

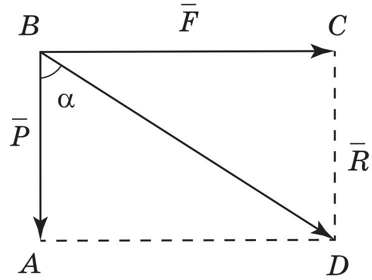


Рис. 7.410

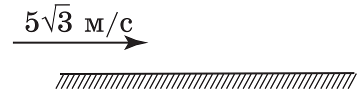


Рис. 7.411

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}; \ \alpha = 60°.$$

Ответ: парашютист спускается под углом 60° к вертикали.

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\bar{a}(a_1; a_2)$ **на число** $\boldsymbol{k}$ (или произведение числа k на вектор $\bar{a}$) называется вектор $k\bar{a} = \overline{(ka_1; ka_2)}$.

Законы умножения вектора на число

Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и чисел k и m верны равенства:

$k\bar{a} = \bar{a}k$;	$(km)\bar{a} = k(m\bar{a})$;	$(k+m)\bar{a} = k\bar{a} + m\bar{a}$;
$k \cdot \bar{0} = \bar{0}$;	$0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$;	$k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$.

В результате умножения вектора на число получается вектор, **коллинеарный** исходному.

Если $k > 0$, то вектор $k\bar{a}$ совпадает с направлением $\bar{a}$.

Если $k < 0$, то вектор $k\bar{a}$ направлен противоположно $\bar{a}$ (рис. 7.412).

Абсолютная величина вектора $|k\bar{a}|$ вычисляется по формуле:

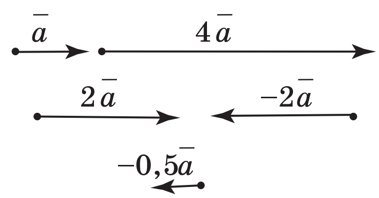


Рис. 7.412

$$\boxed{|k\bar{a}| = |k| \cdot |\bar{a}|}$$

Задача 3. $|\lambda\bar{a}| = 5$. Найти λ, если $\bar{a}(-3; 4)$.

Решение:

Если вектор $\bar{a}$ имеет координаты $(-3; 4)$, то вектор $\lambda\bar{a} = (-3\lambda; 4\lambda)$.

Тогда его модуль:

$$|\lambda\bar{a}| = \sqrt{(-3\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = \sqrt{9\lambda^2 + 16\lambda^2} = \sqrt{25\lambda^2} = |5\lambda|.$$

Но $|\lambda\bar{a}| = 5$, тогда $\lambda = \pm 1$.

Ответ: ± 1.

7.6.4. Угол между векторами

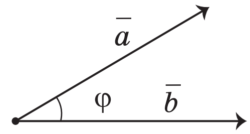


Рис. 7.413

Угол между ненулевыми векторами $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ — это угол между равными им векторами с общим началом (рис. 7.413).

Если векторы коллинеарны ($\overline{a} \parallel \overline{b}$) и одинаково направлены, то угол между ними равен нулю (рис. 7.414).

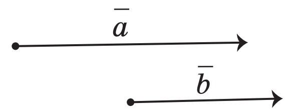


Рис. 7.414

Если векторы коллинеарны ($\overline{a} \parallel \overline{b}$) и противоположно направлены, то угол между ними равен 180° (рис. 7.415).

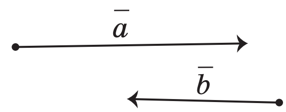


Рис. 7.415

Угол между векторами вычисляется с помощью *скалярного произведения векторов.*

Скалярное произведение векторов $\overline{a}(a_1;\, a_2)$ и $\overline{b}(b_1;\, b_2)$ — это число $a_1b_1 + a_2b_2$, т. е. $\overline{a}_1 \cdot \overline{b}_1 = a_1b_1 + a_2b_2$.

Например, скалярным произведением векторов $\overline{a}(4;\,-1)$ и $\overline{b}(-2;\,-5)$ будет число: $\overline{a} \cdot \overline{b} = 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-5) = -8 + 5 = -3$.

Скалярным квадратом называется число $\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$.

Для любых векторов $\overline{a}(a_1;\, a_2)$, $\overline{b}(b_1;\, b_2)$ и $\overline{c}(c_1;\, c_2)$ выполняется равенство:

$$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}.$$

Теорема о скалярном произведении векторов. Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними:

$$\boxed{\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi}$$

Следствия:

1. **Косинус угла между ненулевыми векторами** можно вычислить по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}.$$

2. Знак скалярного произведения определяет **вид угла между векторами:**
   а) если $\overline{a} \cdot \overline{b} > 0$, то $0° < \varphi < 90°$, т. е. φ — острый угол (рис. 7.416);
   б) если $\overline{a} \cdot \overline{b} < 0$, то $90° < \varphi < 180°$, т. е. φ — тупой угол (рис. 7.417).

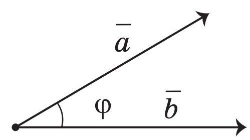


Рис. 7.416

3. **Признак перпендикулярности векторов.**
   Если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны:
   если $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, то $\overline{a} \perp \overline{b}$.
   Верно и обратное утверждение: если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:
   если $\overline{a} \perp \overline{b} = 0$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

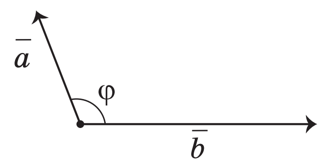


Рис. 7.417

Задача 1. При каком значении x векторы $\overline{a}(x;\, 3)$ и $\overline{b}(3;\, 2)$ перпендикулярны?

Решение:

Если $\overline{a} \perp \overline{b}$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, т. е. $x \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0$; $3x = -6$; $x = -2$.

Ответ: -2.

Задача 2. Найти угол между векторами $\bar{a}(-1;\ 2)$ и $\bar{b}(-2;\ -1)$.

Решение:

Найдем скалярное произведение векторов: $\bar{a}\cdot\bar{b} = -1\cdot(-2) + 2\cdot(-1) = 2 - 2 = 0.$

Значит, $\bar{a}\perp\bar{b}$, угол между векторами $90°$.

Ответ: $90°$.

Задача 3. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 3$; $|\bar{b}| = 8$, $\varphi = 120°$.

Решение:

По теореме о скалярном произведении:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi = 3\cdot 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -12 \quad \left(\cos 120° = -\frac{1}{2}\right).$$

Ответ: -12.

Задача 4. Найти абсолютную величину вектора $\bar{a}+\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 7$; $|\bar{b}| = 8$, угол между ними $60°$.

Решение:

Используем понятие скалярного квадрата:

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2 = (\bar{a}+\bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}^2 = |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi + |\bar{b}|^2 =$$

$$= 7^2 + 2\cdot 7\cdot 8\cdot\frac{1}{2} + 8^2 = 169. \text{ Тогда } |\bar{a}+\bar{b}| = 13.$$

Ответ: 13.

Задача 5. Даны: $\bar{a}\perp\bar{b}$, $\bar{a}\perp\bar{c}$; $\angle(b;\ c) = 60°$; $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$. Вычислить скалярное произведение $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-3\bar{c})$.

Решение:

$$(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-3\bar{c}) = \bar{a}^2 - 3\bar{a}\cdot\bar{c} + \bar{b}\cdot\bar{a} - 3\bar{b}\cdot\bar{c}.$$

$$\bar{a}\perp\bar{b}, \text{ поэтому } \bar{b}\cdot\bar{a} = 0; \quad \bar{a}\perp\bar{c}, \text{ поэтому } \bar{a}\cdot\bar{c} = 0.$$

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = 1; \quad 3\bar{b}\cdot\bar{c} = 3|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|\cos 60° = 3\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 1{,}5.$$

$$\text{Тогда } (\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-3\bar{c}) = |\bar{a}|^2 - 3\bar{b}\cdot\bar{c} = 1 - 1{,}5 = -0{,}5.$$

Ответ: $-0{,}5$.

Задача 6. Даны три точки $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 1)$, $C(3;\ 1)$. Найти косинус угла A ΔABC.

Решение:

Чтобы найти косинус угла A, найдем косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 7.418):

$$\cos\angle A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}.$$

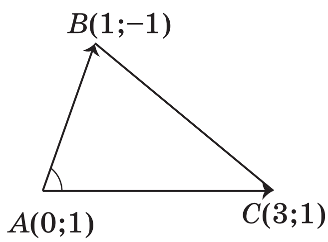


Рис. 7.418

Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB} = (\overline{1-0;\ -1-1}) = (\overline{1;\ -2});$$

$$\overline{AC} = (\overline{3-0;\ 1-1}) = (\overline{3;\ 0}); \quad |\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5};$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3; \quad \overline{AB}\cdot\overline{AC} = 1\cdot 3 + 0\cdot(-2) = 3; \quad \cos\angle A = \frac{3}{3\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

7.6.5. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

В результате умножения вектора на число получается вектор, **коллинеарный** данному (т. е. лежащий с данным вектором на одной прямой или на параллельных прямых).

Свойство коллинеарных векторов

Если векторы коллинеарны (пишут: $\overline{a} \parallel \overline{b}$), то существует такое число k, что $\overline{b} = k\overline{a}$, т. е. если векторы коллинеарны, их **координаты пропорциональны.**

Признаки коллинеарности векторов

Если координаты векторов пропорциональны (т. е. если существует такое k, что $\overline{b} = k\overline{a}$), то векторы коллинеарны.

$$\text{Если } \overline{a}(a_1; a_2) \text{ и } \overline{b}(b_1; b_2) \ \overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Задача 1. При каком значении x векторы $\overline{a}(1; -1)$; $\overline{b}(x; 2)$ коллинеарны?

Решение:

$$\overline{a} \parallel \overline{b}, \text{ поэтому } \frac{1}{x} = \frac{-1}{2};\ x = -2.$$

Ответ: -2.

Задача 2. Даны точки $A(5; -4)$, $B(5; -7)$, $C(2; 2)$, $D(-1; 5)$. Доказать, что $\overline{DB} \parallel \overline{CA}$, установить, одинаково или противоположно они направлены.

Решение:

Найдем координаты векторов: $\overline{DB}(5-(-1); -7-5)$; $\overline{DB}(6; -12)$; $\overline{CA}(5-2; -4-2)$; $\overline{CA}(3; -6)$. Векторы $\overline{DB}$ и $\overline{CA}$ коллинеарны, т. е. $\dfrac{6}{3} = \dfrac{-12}{-6} = 2$; т. е. $\overline{DB} = 2\overline{CA}$, $k = 2$, векторы одинаково направлены.

Разложение вектора по двум неколлинеарным

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — ненулевые векторы, причем $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — неколлинеарны. Тогда любой вектор $\overline{c}$ можно разложить единственным способом по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b},$$

где некоторые числа λ и μ называются **коэффициентами разложения**.

Задача 3. Даны векторы $\overline{a}(-1; 2)$ и $\overline{b}(1; 1)$. Найти такие числа λ и μ, чтобы $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, если $\overline{c}(-3; 3)$.

Решение:

$$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} = \lambda\overline{(-1; 2)} + \mu\overline{(1; 1)} = \overline{(-\lambda; 2\lambda)} + \overline{(\mu; \mu)} = \overline{(-\lambda + \mu; 2\lambda + \mu)}; \quad \text{но } \overline{c}(-3; 3),$$

$$\text{тогда получим систему уравнений: } \begin{cases} -\lambda + \mu = -3, \\ 2\lambda + \mu = 3; \end{cases} \begin{cases} \lambda = 2, \\ \mu = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\lambda = 2$, $\mu = -1$, т. е. $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$.

Разложение вектора по координатным осям

$|\overline{a}| = 1$. Вектор называется **единичным**, если его абсолютная величина равна 1 (рис. 7.419).

Единичные векторы, имеющие направление положительных полуосей, называют **координатными векторами**, или **ортами** $\overline{i}(1; 0)$ и $\overline{j}(0; 1)$.

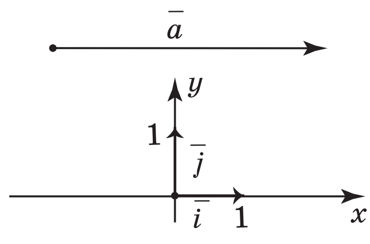


Рис. 7.419

Вектор $\overline{i}$ лежит на оси x, вектор $\overline{j}$ — на оси y.
Очевидно, что орты отличны от нуля и **неколлинеарны**.
Любой вектор $\overline{a}(a_1;\, a_2)$ можно разложить по этим векторам.

Например, $\overline{a}(-3;\, 4) = -3\overline{i} + 4\overline{j}$; $\overline{b}(5;\, 0) = 5\overline{i}$; $\overline{c}(0;\, -4) = -4\overline{j}$.

Задача 4. Какие из векторов $\overline{a}(1;\, 1)$; $\overline{b}(-1;\, 0)$; $\overline{c}(1;\, -1)$; $\overline{m}\left(\frac{5}{13};\, -\frac{12}{13}\right)$ являются единичными?

Решение:

Найдем модуль каждого вектора:

а) $|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

б) $\overline{b} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$;

в) $\overline{c} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$;

г) $\overline{m} = \sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169} + \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1$.

Ответ: единичными являются векторы $\overline{b}(-1;\, 0)$ и $\overline{m}\left(\frac{5}{13};\, -\frac{12}{13}\right)$.

Задача 5. Выписать координаты векторов, разложенных по ортам:

$$\overline{a} = 6\overline{i} - 5\overline{j};\ \overline{b} = -\frac{1}{3}\overline{i} - 3\overline{j};\ \overline{c} = 7\overline{j};\ \overline{d} = \overline{i} - \overline{j};\ \overline{e} = -3\overline{i};\ \overline{f} = -\overline{j}.$$

Ответ: $\overline{a}(6;\, -5)$; $\overline{b}\left(-\frac{1}{3};\, -3\right)$; $\overline{c}(0;\, 7)$; $\overline{d}(1;\, -1)$; $\overline{e}(-3;\, 0)$; $\overline{f}(0;\, -1)$.

Задача 6. Записать разложение вектора по координатным векторам (ортам):

$$\overline{a}\left(-1;\, \frac{1}{3}\right);\ \overline{b}(-1;\, 0);\ \overline{c}(0;\, 5);\ \overline{k}(0;\, 1).$$

Ответ: $\overline{a} = -\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j}$; $\overline{b} = -\overline{i}$; $\overline{c} = 5\overline{j}$; $\overline{k} = \overline{j}$.

7.6.6. Координаты вектора

Векторы $\overline{i}(1;\, 0)$ и $\overline{j}(0;\, 1)$ ортогональны (перпендикулярны). Эти векторы называют **координатными векторами** или **ортами**, они образуют так называемый **базис** на плоскости. Это векторы, с помощью которых раскладывается любой вектор на плоскости: $\overline{a}(a_1;\, a_2) = a_1\overline{i} + a_2\overline{j}$ (рис. 7.420).

Числа a_1 и a_2 называют **координатами вектора**.

Если векторы заданы только своими координатами, например $\overline{a}(-3;\, 0)$, $\overline{b}(1;\, -2)$, $\overline{c}(0;\, 5)$, то их можно откладывать от любой точки координатной плоскости.

Если вектор задан координатами начала и конца, то точки A и B имеют строго фиксированные координаты, например $A(-1;\, 1)$, $B(3;\, 4)$ (рис. 7.421).

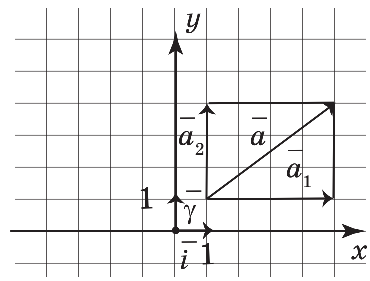


Рис. 7.420

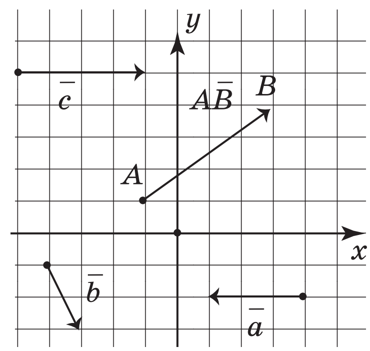


Рис. 7.421

Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$, нужно от координат конца отнять соответствующие координаты начала.

Задача 1. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если $A(-4; 4)$ и $B(-7; 0)$.

Решение:

$x_{AB} = -7 - (-4) = -7 + 4 = -3$; $y_{AB} = 0 - 5 = -5$; $AB(-3; -5)$.

Задача 2. Дан вектор $\overline{MN}(-4; 5)$. Найти координаты точки N, если $M(1; 3)$.

Решение:

Пусть точка N имеет координаты $N(x_N; y_N)$, тогда $MN(x_N - 1; y_N + 3)$. Получаем уравнения: $x_N - 1 = -4$; $x_N = -3$; $y_N + 3 = 5$; $y_N = 2$; $N(-3; 2)$.
Ответ: $(-3; 2)$.

Многие геометрические задачи можно решать с использованием векторов и векторных соотношений, в некоторых случаях это позволяет значительно упростить рассуждения и расчеты.

Этапы векторного метода

1) сформулировать задачу на языке векторов;
2) преобразовать составленные равенства на основании векторных соотношений;
3) перевести полученные результаты на язык геометрии.

Рассмотрим примеры использования векторного языка для формулирования некоторых геометрических утверждений.

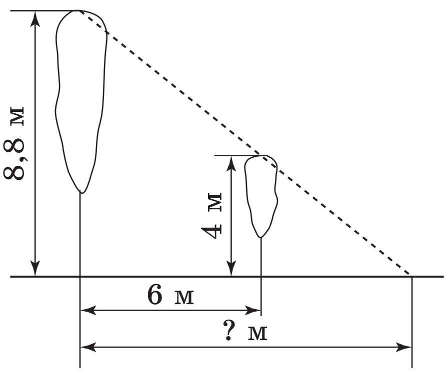
На геометрическом языке	**На векторном языке**
$a \parallel b$	$\overline{AB} = k\overline{CD}$, где отрезки AB и CD принадлежат соответственно прямым a и b, k — число
Точки A, B и C принадлежат прямой a	Установить справедливость равенства: $\overline{AB} = k\overline{BC}$ или $\overline{AC} = k\overline{BC}$, или $\overline{AC} = k\overline{AB}$
Точка C принадлежит отрезку AB, где $AC : AB = m : n$ (деление отрезка в данном отношении)	$\overline{AC} = \frac{m}{n}\overline{CB}$ или $\overline{QC} = \frac{n}{m+n}\overline{QA} + \frac{m}{m+n}\overline{QB}$ для некоторой точки Q
$a \perp b$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, где точки A и B принадлежат прямой a, а точки C и D — прямой b
Вычислить длину отрезка	а) выбрать два неколлинеарных вектора, у которых известны длины и угол между ними; б) разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; в) найти скалярный квадрат этого вектора: $\bar{a}^2 = \lvert\bar{a}\rvert^2$
Вычислить величину угла	а) выбрать два неколлинеарных вектора, для которых известно отношение длин и углы между ними; б) выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; в) вычислить $\cos(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert}$

Тренировочные тестовые задания к разделу 7

1. Какой угол (в градусах) описывает минутная стрелка за 6 минут?
1) 6° 2) 12° 3) 30° 4) 36°

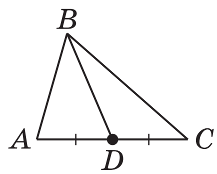
2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, а угол A равен 30°, $AC = 10\sqrt{3}$. Найдите AB.
1) $5\sqrt{3}$ 2) $20\sqrt{3}$ 3) 10 4) 20

3. Дерево высотой 8,8 м отбрасывает тень. Оно полностью заслоняет от солнца дерево высотой 4 м, находящееся от него на расстоянии 6 м, как показано на рисунке. Определите, на какое расстояние (в метрах) отбрасывает тень большое дерево.



1) 6,6 2) 9,2 3) 10,8 4) 11

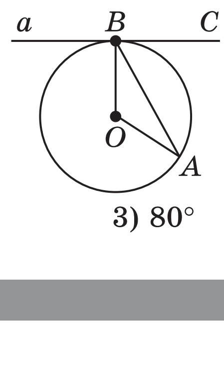
4. В треугольнике ABC, периметр которого равен 24 см, проведена медиана BD, которая делит треугольник на два треугольника с периметрами 16 см и 18 см. Найдите длину медианы BD.



1) 5 см 2) 7,5 см 3) 12 см 4) 18 см

5. Укажите номера верных утверждений.
1) В треугольнике против меньшего угла лежит большая сторона.
2) Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
3) Треугольник со сторонами 5, 12 и 13 является прямоугольным.
1) 1,2 и 3 2) 2 и 3 3) 2 4) 3

6. Прямая a касается окружности в точке B. Найти $\angle AOB$, если $\angle ABC = 40°$.

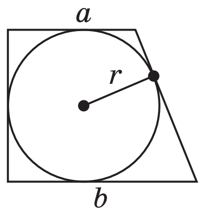


1) 20° 2) 60° 3) 80° 4) 120°

7. Диагональ делит равнобокую трапецию на два равнобедренных треугольника. Найдите больший угол трапеции.

1) $108°$ 2) $120°$ 3) $135°$ 4) $150°$

8. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, если основания трапеции равны a и b.



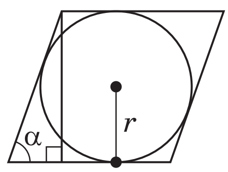
1) $\dfrac{ab}{a+b}$ 2) $\dfrac{ab}{a-b}$ 3) $\dfrac{a+b}{2}$ 4) $\dfrac{b-a}{2}$

9. Укажите номера верных утверждений.

1) Сумма углов выпуклого четырехугольника равна $360°$.
2) Сумма противоположных углов параллелограмма равна $180°$.
3) Если диагонали ромба равны 3 и 4, то его площадь равна 12.
4) Площадь трапеции равна произведению его средней линии на высоту.
5) Отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия.

1) 1 и 4 2) 2 и 5 3) 1; 2 и 5 4) 3; 4 и 5

10. Около окружности радиуса r описан ромб с острым углом α. Найдите площадь ромба.

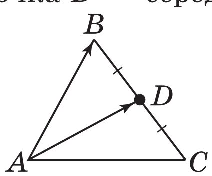


1) $\dfrac{4r^2}{\sin\alpha}$ 2) $\dfrac{4r^2}{\operatorname{tg}\alpha}$ 3) $\dfrac{4r^2}{\cos\alpha}$ 4) $4r^2\sin\alpha$

11. Вектор $\overline{AB}$ с концом в точке $B(8; -3)$ имеет координаты $(4; -11)$. Найдите сумму координат точки A.

1) 4 2) -4 3) 5 4) 12

12. Стороны правильного треугольника ABC равны 4. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, где точка D — середина стороны BC.



1) 16 2) 8 3) 12 4) $6\sqrt{3}$

13. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны. Найдите координаты точки D, если $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$.

1) $D(2; 1)$ 2) $D(-2; 1)$ 3) $D(-1; -2)$ 4) $D(2; -1)$.

14. Найдите длину вектора $\overline{a}(6; y)$, если известно, что он коллинеарен вектору $\overline{b}+\overline{c}$, где $\overline{b}(-2; 0)$ и $\overline{c}(0; 1)$.

1) 4 2) $4\sqrt{3}$ 3) $5\sqrt{3}$ 4) $3\sqrt{5}$

15. Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 4\sqrt{2}$; $|\overline{b}| = 3$; $\overline{a} \cdot \overline{b} = 12$.
1) 30° 2) 45° 3) 60° 4) 120°

16. Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит его основание на отрезки 9 см и 16 см. Найдите меньший катет треугольника.
Ответ: ____________________.

17. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна $7\sqrt{2}$ см. Найдите катеты.
Ответ: ____________________.

18. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 55 см, а основание — 66 см. Найдите длину отрезков, на которые биссектриса при основании делит боковую сторону.

19. Найдите число сторон многоугольника, если сумма его углов 3 060°.
Ответ: ____________________.

20. Найдите площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник со стороной $2\sqrt{3}$ см.
Ответ: ____________________.

21. В трапецию вписана окружность. Найдите ее среднюю линию, если боковые стороны равны 20 см и 24 см.
Ответ: ____________________.

22. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 1 : 2. Площадь большего многоугольника 10. Найдите площадь меньшего.
Ответ: ____________________.

23. Разность оснований равнобокой трапеции равна 14 см, а диагональ является биссектрисой тупого угла. Найдите площадь трапеции, если ее периметр 86 см.
Ответ: ____________________.

24. Найдите координаты вектора PK, если $P(-1;\ 4)$; $K(5;\ -7)$.
Ответ: ____________________.

25. Выясните, каким является угол между векторами $\overline{a}(1;\ -4)$ и $\overline{b}(-2;\ 0)$:
1) острый; 2) тупой; 3) прямой.
Ответ: ____________________.

26. $|\lambda\overline{a}| = 5$. $\overline{a}(-6;\ 8)$. Найдите λ, если $\lambda < 0$.
Ответ: ____________________.

27. Даны векторы $\overline{a}(1;\ 0)$, $\overline{b}(1;\ 1)$ и $\overline{c}(-1;\ 0)$. Найдите λ и μ, если $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$.
Ответ: ____________________.

28. Найдите $|\overline{a} + 2\overline{b}|$, если $|\overline{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\overline{b}| = 4$; $\text{P}(a;\ b) = 135°$.
Ответ: ____________________.

8. Статистика и теория вероятностей

Знать:
- что такое статические таблицы, таблицы, диаграммы, графики;
- основные вероятностные понятия;
- средние результаты измерений;
- события;
- частота событий;
- геометрическая вероятность;
- понятие события, частоты события, геометрической вероятности;
- основные комбинаторные правила.

Уметь:
- извлекать статистическую информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках;
- решать комбинаторные задачи путем организованного перебора вариантов, а также с использованием правила умножения;
- вычислять средние результаты измерений;
- находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные;
- находить вероятности случайных событий в простейших случаях.

8.1. Описательная статистика

8.1.1. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков

Статистика — наука, которая собирает, обрабатывает и изучает данные, связанные с различными массовыми явлениями, процессами, событиями.

Математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и исследования статистических данных для научных и практических выводов.

Цель описательной статистики — обработка данных, их систематизация, наглядное представление в форме таблиц, диаграмм и графиков, а также их количественное описание посредством основных статистических показателей.

Описательная статистика использует три основных метода обработки данных:
1) табличное представление;
2) графическое представление (в виде графиков или диаграмм);
3) расчет статистических показателей.

Статистическая таблица — система строк и столбцов, в которой в определенной последовательности отображается статистическая информация.

Статистическая таблица является средством наглядного выражения результатов исследования.

Статистические таблицы бывают:

а) **простые** — содержат перечень отдельных единиц, входящих в состав совокупности анализируемого экономического явления. Например:

Добыча некоторых видов ископаемых в России в 2007 г.

Виды ископаемых	Объем добычи
Нефть, млн т	491
Естественный газ, млрд куб. м	651
Уголь, млн т	315

б) **групповые** — содержат сгруппированные по одному признаку единицы совокупности. Например:

Распределение населения России по полу на 1 января 2007 г.

	млн чел.	в % к итогу
Численность населения, всего	142,2	100,0
В том числе:		
Мужчины	65,8	46,3
Женщины	76,4	53,7

в) **комбинационные** — содержат сгруппированные по нескольким признакам единицы совокупности. Например,

**Внешняя торговля РФ в 2007 г.
(в фактических действовавших ценах)**

	млрд долл. США	% к итогу
Экспорт товаров:	355,2	100
— со странами дальнего зарубежья	301,5	84,9
— со странами СНГ	53,7	15,1
Импорт товаров:	223,1	100
— со странами дальнего зарубежья	191,2	85,7
— со странами СНГ	31,9	14,3

Задача 1. Используя приведенную выше комбинационную таблицу, ответить на вопросы:

а) на сколько млрд долл. экспорт товаров превышает импорт?

б) на сколько % экспорт товаров в страны дальнего зарубежья превышает экспорт в страны СНГ?

в) во сколько раз экспорт товаров превышает импорт товаров в страны дальнего зарубежья?

Решение:

а) Экспорт товаров превышает импорт на: $355{,}2 - 223{,}1 = 132{,}1$ (млрд долл.).

б) На $84{,}9\ \% - 15{,}1\ \% = 69{,}8\ \%$.

в) В $301{,}5 : 191{,}2 \approx 1{,}6$ раз.

Использование **графиков и диаграмм** при отображении статических показателей придает им наглядность, облегчает восприятие и помогает лучше уяснить сущность изучаемого явления.

Задача 2. Используя график, ответить на вопрос: в какие дни цена на приватизационные чеки была: а) наибольшей; б) наименьшей; в) не менее 5 тыс. рублей?

Решение:

Рассмотрим график.

Уровень средней цены приватизационных чеков на торгах РТСБ (российской товарно-сырьевой биржи), руб.

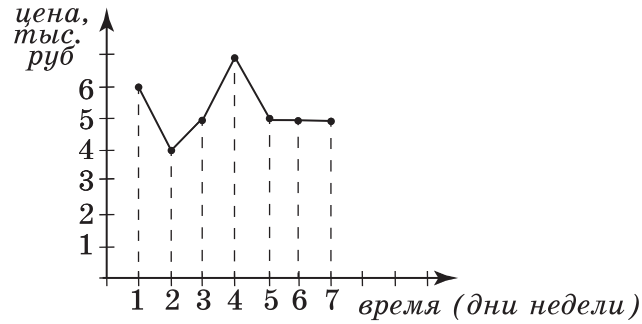


Рис. 8.1

а) В 1-й и 4-й день; б) во 2-й, 5-й, 6-й и 7-й день; в) в 1-й, 3-й и 4-й день.

Диаграммы бывают **столбчатые** (столбчиковые), **полосовые** и **круговые**. Например, диаграмма «Реки мира».

Задача 3. Используя диаграмму «Реки мира», ответить на вопросы:

а) Какая река имеет наибольшую длину?

б) Какая река имеет наименьшую длину?

в) Какие реки длиннее 2 тыс. м, но короче 3 тыс. м?

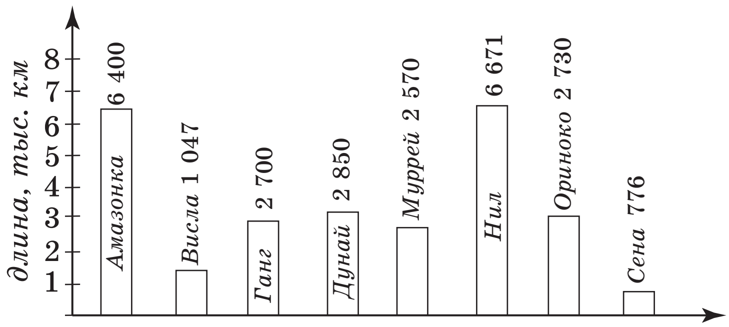


Рис. 8.2

Ответ: а) Нил; б) Сена; в) Ганг, Дунай, Муррей, Ориноко.

Задача 4. На круговой диаграмме показан возрастной состав населения России.

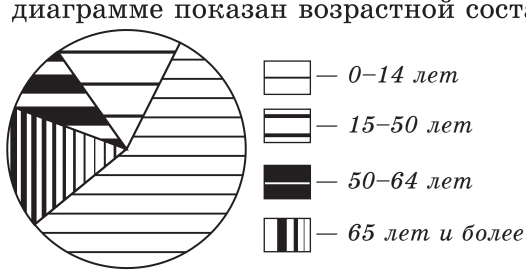


Рис. 8.3

Используя диаграмму, выбрать правильный ответ:

а) В каких пределах находится доля населения от 0 до 14 лет?

1) 0—25 %; 2) 25—50 %; 3) 50—75 %; 4) 75—100 %.

б) Население какого возраста преобладает?
1) 0—14 лет; 2) 15—50 лет; 3) 51—64 лет; 4) 65 лет и более.
в) Какова численность населения России, если людей в возрасте 50—64 лет в России проживает примерно 30 млн?
1) около 98 млн; 2) около 7 млн; 3) около 143 млн; 4) около 180 млн.

Решение:

а) Ответ 1), т. е. 0 до 25 %;
б) Ответ 2), преобладает население возраста 15—50 лет;
в) По диаграмме видно, что населения в возрасте от 50 до 64 лет меньше четверти, но более пятой части, поэтому общая численность населения должна быть более 120 млн и менее 150 млн, подходит 143 млн. Поэтому ответ: 3.

Задача 5. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки на расстояние 700 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость аренды. Клиент обязан оплатить топливо для автомобиля.

Автомобиль	Вид топлива, его цена (руб./литр)	Расход топлива на 100 км (в литрах)	Арендная плата за сутки, руб.
1	Дизельное, 28	14	3 400
2	Бензин, 30	16	3 000
3	Газ, 12	18	3 200

Если клиент выберет самый дешевый вариант, то какую сумму он заплатит?

Решение:

Вычислим расходы клиента по каждому виду автомобиля:

1-й автомобиль: $\frac{700\text{ км}}{100\text{ км}} \cdot 14\text{ л} \cdot 28\text{ руб.} / \text{л} + 3\,400\text{ руб.} = 6\,144\text{ руб.};$

2-й автомобиль: $\frac{700\text{ км}}{100\text{ км}} \cdot 16\text{ л} \cdot 30\text{ руб.} / \text{л} + 3\,000\text{ руб.} = 6\,360\text{ руб.};$

3-й автомобиль: $\frac{700\text{ км}}{100\text{ км}} \cdot 18\text{ л} \cdot 12\text{ руб.} / \text{л} + 3\,200\text{ руб.} = 4\,712\text{ руб.}$

Ответ: клиент выберет третий автомобиль и заплатит 4 712 руб.

8.1.2. Среднее результатов измерений

Основные статистические характеристики

Для того чтобы вычислить основные статистические характеристики, ряд чисел, полученных в результате сбора данных, необходимо **ранжировать.**

Ранжирование ряда чисел — расположение этих чисел в порядке неубывания, т. е. каждое последующее число должно быть больше или не меньше предыдущего.

Пример 1. Пилот Алексей Редькин в течение недели совершал полеты на вертолете на 750, 630, 620, 700, 590, 625, 790 км. Ранжировать ряд этих чисел.

Решение:

590, 620, 625, 630, 700, 750, 790.

Размах ряда чисел — разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда чисел.

Размах находят, когда хотят определить, как велик разброс данных в ряду.

Пример 2. Для данных, приведенных в примере 1, размах составит: $R = 790 - 590 = 400$.

Среднее значение ряда чисел (среднее арифметическое)

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Среднее значение — это значение величины, которое получается, если сумма всех наблюдаемых значений распределяется поровну между единицами наблюдения.

Пример 3. Найдем среднее значение дальности полета для данных, приведенных в примере 1.

Решение:

$$(590 + 620 + 625 + 630 + 700 + 750 + 790) : 7 \approx 672.$$

Мода ряда чисел

Модой (Mo) называется число, которое встречается в данном ряду чаще всего.

Ряд чисел может иметь более одной моды или не иметь моды совсем.

Моду ряда чисел находят, когда хотят выяснить некоторый типичный показатель.

Пример 4.

а) Ряд чисел, приведенных в примере 1 (590, 620, 625, 630, 700, 750, 790) не имеет моды совсем.

б) Федор в течение недели получал оценки: 3, 4, 4, 2, 5, 4, 3, 3, 4, 2, 5, 5. Найти моду этого ряда чисел.

Очевидно, что $Mo = 4$, поскольку оценка 4 встречается чаще всего.

Медиана ряда чисел

Медиана (Me) — это так называемое серединное значение ранжированного ряда чисел:

а) если количество чисел в ряду нечетное, то медиана — это число, записанное посередине;

б) если количество чисел в ряду четное, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.

Пример 5.

а) В примере 1 ранжированный ряд 590, 620, 625, 630, 700, 750, 790 имеет нечетное количество чисел в ряду. $Me = 630$.

б) В примере 4, *б*) ранжируем ряд из 12 чисел: 2, 2, 3, 3, 3, $\underline{4,\ 4,}$ 4, 4, 5, 5, 5.

$$Me = \frac{4 + 4}{2} = 4. \quad Me = 4.$$

8.2. Вероятность

8.2.1. Частота события, вероятность

Первичным понятием в теории вероятностей является понятие **события**.

Событие — это явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит при определенных условиях.

Событие обозначают A, B, C, ..., т. е. большими буквами латинского алфавита. Любое событие происходит в результате **испытания** (опыта, эксперимента).

Испытание — это условие, в результате которого происходит (или не происходит) событие.

Например, испытание — выстрел по мишени, событие A — «попадание»; событие B — «промах».

Случайным называется событие, которое может произойти, а может не произойти во время проведения испытания.

Например, во время подбрасывания кубика событие A — «появление 4 очков» — является случайным.

Случайные события могут быть **массовыми** и **единичными**.

Пример единичного события: падение Тургусского метеорита.

Примеры массовых событий: появление бракованных деталей в серийном выпуске, размножение бактерий и т. д.

Теория вероятностей изучает только массовые события.

Достоверным называется событие, которое вследствие данного испытания обязательно произойдет.

Например, при 0 °C вода замерзнет, а при 100 °C начнет кипеть. Если бросить камень с высоты, он будет падать вниз.

Невозможным называется событие, которое вследствие данного испытания произойти не может.

Например, камень, брошенный с высоты, летит вверх. Вода при 0 °C начинает закипать. Невозможное событие часто обозначают $\varnothing$.

Достоверные и невозможные события встречаются в жизни сравнительно редко, можно сказать, что мы живем в мире **случайных событий**.

Можно ли оценить шансы появления случайного события? Ответ на этот вопрос дает раздел математики, который называется **теория вероятностей**.

Одним из важных событий, используемых в теории вероятностей, является понятие **частоты случайного события**.

Пусть A — случайное событие по отношению к некоторому испытанию. Представим, что это испытание проведено N раз и при этом событие A наступило в N_A случаях. Тогда отношение

$$\mu = \frac{N_A}{N}$$

называется **частотой события** A в данной серии испытаний.

Вероятностью случайного события A называется число $p(A)$, около которого колеблется частота этого события в длинных сериях испытаний.

Это определение называют **статистическим определением вероятности**.

Пример 1. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Частота рождения мальчиков в такой серии наблюдений 0,515.

Пример 2. Французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII в.) подбрасывал монету 4 040 раз, и при этом герб выпал в 2 048 случаях. Следовательно, частота выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$\mu = \frac{2\,048}{4\,040} \approx 0{,}50693...$$

Пример 3. Английский математик Карл Пирсон (1857—1936) подбрасывал монету 24 000 раз, причем герб выпал 12 012 раз. Частота выпадения герба в этом случае:

$$\mu = \frac{12\,012}{24\,000} \approx 0{,}5005.$$

Эти примеры показывают, что вероятность выпадения герба при одном бросании монеты равна 0,5.

Вероятность **случайного события** A может принимать любые значения от 0 до 1. Естественно считать, что:

- вероятность достоверного события U равна единице:

$$P(U) = 1;$$

- вероятность невозможного события $\varnothing$ равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0.$$

8.2.2. Равновозможные события и подсчет их вероятности

Попарно несовместимые события — это события, два из которых не могут произойти одновременно.

Например, попадание и промах при одном выстреле — это два несовместимых события.

Появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном бросании игрального кубика — это шесть несовместимых событий.

Равновозможные события — события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ в появлении чаще, чем другое, во время многоразовых испытаний, которые проводятся при одинаковых событиях.

Полной группой событий называется множество таких событий, что в результате каждого испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

Например, в испытании — бросок игрального кубика — полную группу событий составят события:

A — «появление 1»;	D — «появление 4»;
B — «появление 2»;	E — «появление 5»;
C — «появление 3»;	F — «появление 6».

Кроме того, события, состоящие в появлении чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6, — **равновозможные события.**

Если события:

а) образуют полную группу событий;

б) являются несовместимыми;

в) являются равновозможными,

то такие события образуют **пространство элементарных событий.**

Отношение числа событий, которые способствуют событию A, к общему количеству событий пространства элементарных событий, называется **вероятностью случайного события** и обозначают $P(A)$.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее количество событий пространства элементарных событий; m — число событий, которые способствуют событию A.

Это определение называют **классическим определением вероятности**.

Пример 1. В коробке лежат 3 желтых и 7 синих шаров. Какова вероятность того, что при вынимании наугад одного шара он окажется: а) синим; б) красным?

Решение:

а) При вынимании шара может произойти: $3 + 7 = 10$ равновероятных событий, а событий, способствующих событию A — появлению синего шара, только 7. Тогда:

$$P(A) = \frac{7}{10};$$

б) В коробке нет красных шаров, поэтому вероятность события B — появление красного шара:

$$P(B) = 0.$$

Пример 2. Из коробки с шахматами случайно выпала одна фигура. Какова вероятность того, что эта фигура:

а) белый король;
б) черный ферзь;
в) король;
г) черная тура;
д) конь
е) белая пешка;
ж) пешка;
з) белая фигура;
и) не пешка;
к) не король;
л) не белый ферзь;
м) не пешка и не король;
н) не конь, не король и не тура.

Решение:

В коробке 32 фигуры, половина — черных, половина — белых. Из них черных (как и белых): 8 пешек, 1 король, 1 ферзь, 2 коня, 2 туры и 2 слона. Поэтому:

а) $P(\text{А}) = \frac{1}{32}$;

б) $P(\text{Б}) = \frac{1}{32}$;

в) $P(\text{В}) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$;

г) $P(\text{Г}) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$;

д) $P(\text{Д}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$;

е) $P(\text{Е}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$;

ж) $P(\text{Ж}) = \frac{16}{32}$;

з) $P(\text{З}) = \frac{1}{2}$;

и) $P(\text{И}) = \frac{1}{2}$;

к) $P(\text{К}) = \frac{30}{32} = \frac{15}{16}$;

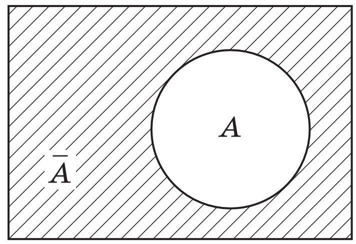
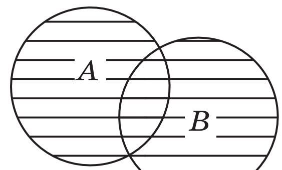
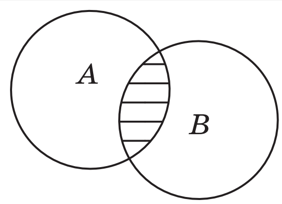
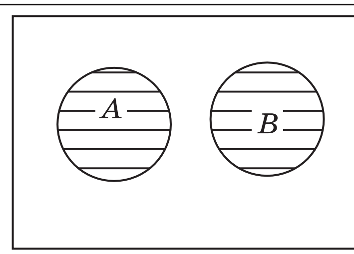
л) $P(\text{Л}) = \frac{35}{36}$;

м) $P(\text{М}) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$;

н) $P(\text{Н}) = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$.

Операции над событиями

Определение	Пример	Теоретико-множественная иллюстрация
Противоположное событие		
Событие $\overline{A}$ называется **противоположным**	1. Если событие A — выпало «число» при	U — достоверное событие

Определение	**Пример**	**Теоретико-множественная иллюстрация**
событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. Вероятность противоположного события: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	подбрасывании монеты, то событие $\overline{A}$ — не выпало «число» при подбрасывании монеты (т. е. выпал «герб»). 2. Если вероятность купить исправный прибор равна 0,97, то вероятность купить неисправный: $1 - 0{,}97 = 0{,}03$	$P(U) = 1$ 
Сумма событий		
Суммой (или объединением) событий *A* и *B* называется событие $A + B$ (или $A \cup B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A или событие B	Из колоды наугад вынули 1 карту. Пусть событие A — вынули червовую карту, B — бубновую карту. Тогда событие $A + B$ — вынули карту красной масти (или бубновую или червовую)	 $A + B$ или $A \cup B$
Произведение событий		
Произведением (или пересечением) событий *A* и *B* называется событие $A \cdot B$ (или $A \cap B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события (A и B)	При бросании игрального кубика рассматривают события: A — выпало четное число очков, B — выпало число, кратное 3. Тогда событие $A \cdot B$ — выпало число очков нечетное и при этом кратное 3 (т. е. число 6)	 $A \cdot B$ или $A \cap B$
Несовместные события		
Два события A и B называются **несовместными**, если их произведение является невозможным событием, т. е. $A \cdot B = \varnothing$ (или $A \cap B = \varnothing$)	При бросании игрального кубика рассматривают события: A — выпало четное число очков, B — выпало 5 очков. События A и B не могут происходить одновременно. $A \cdot B = \varnothing$	 $A \cdot B = \varnothing$
Вероятность суммы двух несовместных событий Если события A и B несовместные, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$		

Пример 3. Мяч трижды бросают в баскетбольную корзину. События A_1, A_2 и A_3 означают: A_1 — при первом броске мяч попал в корзину, A_2 — при втором броске мяч попал в корзину, A_3 — при третьем броске мяч попал в корзину. Записать через события A_1, A_2, A_3 следующие события:
а) B — мяч попал в корзину все три раза;
б) C — мяч ни разу не попал в корзину;
в) D — мяч хотя бы раз попал в корзину;
г) K — мяч попал в корзину только при первом броске.

Решение:

События $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ противоположны событиям A_1, A_2 и A_3 соответственно и заключаются в том, что мяч не попал в корзину при первом, втором или третьем броске. Тогда:
а) $P(B) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ — мяч попал в корзину все три раза.
б) $P(C) = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ — мяч ни разу не попал в корзину.
в) $P(D) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} +$
$+\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$ — мяч попал в корзину хотя бы один раз.
г) $P(K) = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ — мяч попал в корзину только при первом броске.

Пример 4. В результате значительного количества наблюдений учащиеся определили вероятность, с которой в лесопарке встречаются деревья разных пород, и записали результаты в таблицу:

Порода дерева	Сосна	Дуб	Береза	Ель	Осина
Вероятность	0,42 $P(A)$	0,29 $P(B)$	0,16 $P(C)$	0,09 $P(D)$	0,04 $P(E)$

Найти вероятность того, что выбранное наугад в этом лесопарке дерево будет: а) сосной или дубом; б) не дубом; в) хвойным; г) лиственным; д) хвойным или лиственным.

Решение:

Очевидно, что все события будут несовместны, а вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.
а) Выбранное дерево — сосна или дуб: $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,42 + 0,29 = 0,71$.
б) Не дуб, т. е. $P(A + B + D + E) = 0,42 + 0,16 + 0,09 + 0,04 = 0,71$
или $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,29 = 0,71$.
в) Хвойное (т. е. сосна или ель): $P(A + D) = P(A) + P(D) = 0,42 + 0,09 = 0,52$.
г) Лиственное (т. е. не хвойное): $P(\overline{A + D}) = 1 - P(A + D) = 1 - 0,51 = 0,49$.
д) Хвойное или лиственное, это достоверное событие U: $P(U) = 1$.

Пример 5. Два охотника определяют цель одновременно независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания в мишень первого — 0,75, второго — 0,86. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.

Решение:

Пусть событие A состоит в том, что первый стрелок попал в цель, т. е. $P(A) =$ $= 0,75$, а событие $\overline{A}$ — в том, что он не попал в цель, т. е. $P(\overline{A}) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Аналогично событие B — второй стрелок попал в цель, $P(B) = 0,86$; $P(\overline{B}) = 1 - 0,86 = 0,14$. Тогда вероятность того, что оба стрелка не попали в цель:

$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,25 \cdot 0,14 = 0,035$. Тогда вероятность того, что хотя бы один попал в цель: 1 − 0,035 = 0,965.

Ответ: 0,965.

Пример 6. В коробке лежат разноцветные шары: 20 красных, 10 белых, остальные — черные. Сколько черных шаров в коробке, если вероятность выбора случайным образом черного шара $P(r) = \dfrac{1}{3}$?

Решение:

Пусть в коробке лежат x черных шаров, тогда общее количество шаров: $20 + 10 + x$, вероятность вытащить черный шар равна $\dfrac{1}{3}$, значит, $P(r) = \dfrac{x}{20+10+x} = \dfrac{1}{3}$;

$\dfrac{x}{30+x} = \dfrac{1}{3}$; $3x = x + 30$; $x = 15$.

Ответ: 15.

Пример 7. Среди однотипных деталей, выпускаемых в цеху, 1 % бракованных. Среди качественных деталей — 70 % деталей высшего сорта. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь будет высшего сорта?

Решение:

Пусть событие A состоит в том, что деталь небракованная, а событие B — в том, что деталь высшего сорта. Тогда событие $\dfrac{A}{B}$ — выбрали качественную деталь высшего сорта.

Выбор одной детали — равновозможные события, поскольку 1 % деталей бракованных, то 99 % деталей качественных и $P(A) = 0,99$. Среди качественных деталей 70 % высшего сорта, т. е. $P_A(B) = 0,7$. Тогда искомая вероятность:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,99 \cdot 0,7 = 0,693.$$

Ответ: 0,693.

8.2.3. Представление о геометрической вероятности

Пусть U — некоторая фигура на плоскости, $S(U)$ — площадь фигуры U.

Эксперимент — это случайный выбор какой-либо точки U из фигуры U.

Элементарные события U — точки фигуры U.

A — часть фигуры U ($A \in U$).

$S(A)$ — площадь фигуры A.

Событие A — попадание точек U в фигуру A. Тогда элементарными событиями, благоприятствующими событию A, будут все точки фигуры A.

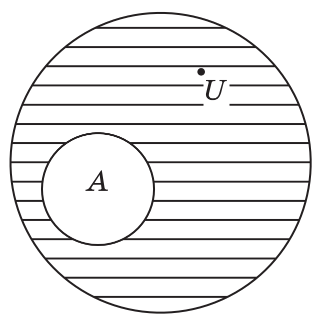


Рис. 8.4

Геометрической вероятностью события A называется отношение площади фигуры, благоприятствующей событию A, к площади всей заданной фигуры:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}.$$

Обобщим это определение.

Если U — пространственная фигура (тело), то записи $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать как объемы тела U и тела A — части тела U.

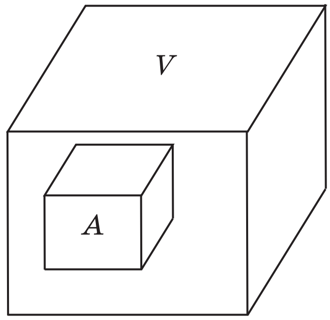


Рис. 8.5

Рис. 8.6

Если U — отрезок, то записи $S(U)$ и $S(A)$ следует понимать как длины отрезка U и его части — отрезка A.

Объем тела U в пространстве, площадь фигуры U на плоскости, длину отрезка U на прямой назовем **мерой** фигуры U. Тогда:

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } U}.$$

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры фигуры, благоприятствующей событию A, к мере всей заданной фигуры.

Пример 1. Два друга договорились созвониться в промежутке с 10 до 11 часов. Найти вероятность того, что их разговор начнется в промежутке с 10:30 до 10:35.

Решение:

Один друг может позвонить другому в промежутке с 10:00 до 11:00. В этой задаче эксперимент — это фиксирование времени телефонного звонка. Изобразим все результаты эксперимента в виде отрезка MN.

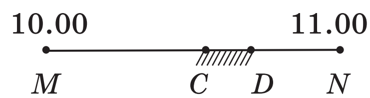


Рис. 8.7

Пусть событие A — вызов — произошел в промежутке с 10:30 до 10:35, то элементарные события, благоприятствующие событию A, можно изобразить точками отрезка CD.

Если считать, что время вызова в оговоренном промежутке распределяется равномерно, то $P(A) = \dfrac{\text{мера } CD}{\text{мера } MN} = \dfrac{5}{60} = \dfrac{1}{12} \approx 0,08$ (1 час = 60 мин).

Ответ: 0,08.

Пример 2. Даны отрезки $AB = 12$ см; $AM = 2$ см; $MC = 4$ м. На отрезке AB случайным образом отмечена точка X. Какова вероятность того, что точка X попадет на отрезок: а) AM; 2) AC; 3) MC; 4) MB; 5) AB?

Решение:

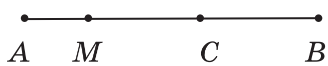


Рис. 8.8

1. Пусть событие A состоит в том, что точка X попадает на отрезок AM:

$$P(A) = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

2. Событие B — точка X попадает на отрезок AC: $P(B) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2+4}{12} = \dfrac{1}{2}$.

3. Событие C — точка X попадает на отрезок MC: $P(C) = \dfrac{MC}{AB} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

4. Событие D — точка X попадает на отрезок MB: $P(D) = \dfrac{12-2}{12} = \dfrac{5}{6}$.

5. Событие E — точка X попадает на отрезок AB: $P(E) = \dfrac{AB}{AB} = \dfrac{12}{12} = 1$.

Пример 3. Оконная решетка состоит из клеток со стороной 20 см. Какова вероятность того, что попавший в окно мяч пролетит через решетку, не задев ее, если радиус мяча равен 10 см (рис. 8.9)?

Решение:

рис. Площадь диагонального сечения мяча:

$$S_м = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi\ (см^2).$$

Площадь одной клетки оконной решетки:

$$S_{кв} = a^2 = 20^2 = 400\ (см^2).$$

Тогда $P(A) = \dfrac{S_м}{S_{кв}} = \dfrac{100\pi}{400} = \dfrac{\pi}{4} \approx \dfrac{3,14}{4} \approx 0,79.$

Ответ: 0,79.

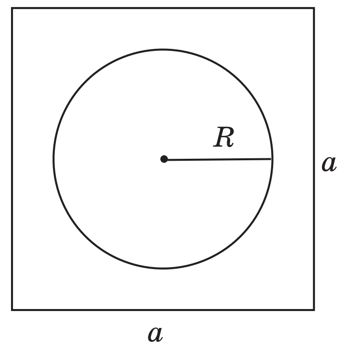


Рис. 8.9

8.3. Комбинаторика

8.3.1. Решение комбинаторных задач: перебор вариантов, комбинаторное правило умножения

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются способы выбора и размещения элементов некоторого конечного множества на основании некоторых условий.

В простейших комбинаторных задачах можно осуществлять перебор всех возможных вариантов, т. е. комбинаций.

Пример 1. Из цифр 2, 4 и 7 составить трехзначное число, в котором ни одно число не может повторяться более двух раз. Сколько таких чисел можно составить?

Решение:

Оформим решение в виде «поэтажного плана»:

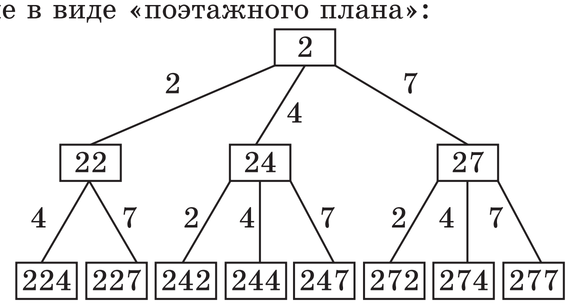


Рис. 8.10

Всего 8 чисел.

Аналогично составим схемы, если первая цифра 4 и 7, т. е. всего: $8 \cdot 3 = 24$ варианта.

Ответ: 24.

Построенная графическая модель перебора вариантов решения задачи называется **деревом возможных вариантов**.

Пример 2. В урне лежат три неразличимых на ощупь шара: два белых и один черный. При вытаскивании черного шара его возвращают обратно, а белый вытащенный шар откладывают в сторону. Такую операцию проводят три раза подряд. Изобразить дерево возможных вариантов.

Решение:

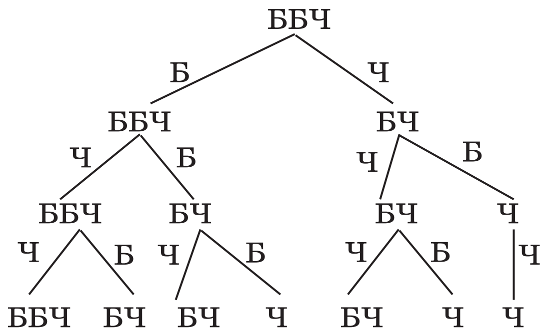


Рис. 8.11

Пример 3. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех горизонтальных полос одинаковой ширины разных цветов — белого, синего и красного. Сколько стран могут использовать эту символику, если у каждой страны флаг свой?

Решение:

Построим дерево возможных вариантов:

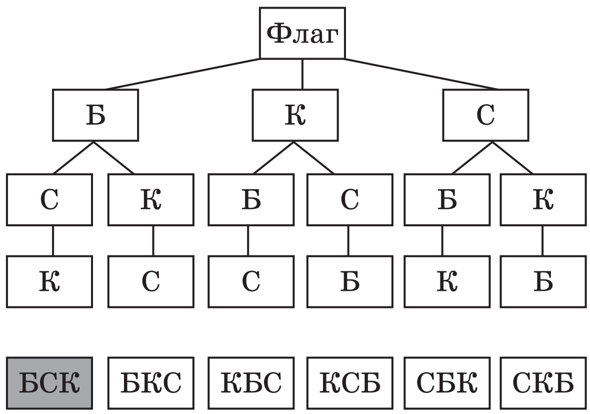


Рис. 8.12

Ответ: шесть стран (российский флаг выделен на схеме).

Дерево вариантов удобно рисовать для небольшого количества вариантов, а уже для сотен вариантов это сложно. Поэтому для решения многих комбинаторных задач используют два базовых правила: **правило суммы** и **правило произведения**.

Правило суммы. Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то A или B можно выбрать $m + n$ способами.

Пример 4. Если на тарелке лежат 12 яблок и 9 апельсинов, то выбрать один фрукт (т. е. апельсин или яблоко) можно: $12 + 9 = 21$ способом.

Правило произведения. Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Пример 5. Если на почте есть конверты 5 видов, а марки — 4 видов, то выбрать набор «конверт и марка» можно: $5 \cdot 4 = 30$ способами.

Комбинаторные задачи можно решать и с помощью **графов**.

Граф — это геометрическая фигура, состоящая из точек (вершин графа) и линий, их соединяющих (или ребер графа).

Пример 6. Андрей, Борис, Петр и Федор играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Решение:

Построим полный граф с четырьмя вершинами А, Б, П и Ф, обозначенными по первым буквам имен мальчиков. В полном графе проводим всевозможные ребра. В данном случае отрезки-ребра обозначают сыгранные партии. Из рисунка видно, что граф имеет 6 ребер, значит, сыграно 6 партий.

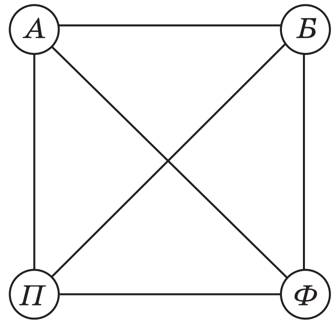


Рис. 8.13

Ответ: 6 партий.

Пример 7. Андрей, Борис, Петр и Федор обменялись фотографиями. Причем каждый подарил каждому свою фотографию. Сколько фотографий было подарено?

Решение:

1-й способ. С помощью стрелок на графе показан процесс обмена фотографиями. Очевидно, что стрелок вдвое больше, чем ребер, т. е. 12.

2-й способ. Каждый из 4-х мальчиков подарил друзьям 3 фотографии, т. е.: $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12 фотографий.

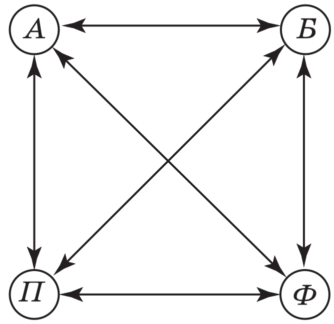


Рис. 8.14

Упорядоченное множество — это такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой — на втором и какой — на n-м.

Например, переставляя цифры в числе 256 (там множество цифр {2; 5; 6} уже упорядоченное), можно составить такие перестановки без повторений (цифры в числе не повторяются):

(2; 5; 6), (2; 6; 5), (5; 2; 6), (5; 6; 2), (6; 2; 5) и (6; 5; 2) — всего шесть перестановок.

Количество перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n, например $P_3 = 6$.

Формула числа перестановок без повторений из n элементов:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ (читается «эн факториал»).

Например, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Пример 8. Сколькими способами можно строить семь учащихся в колонну по одному?

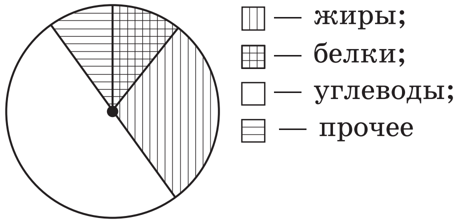
Решение:

Количество способов равно числу перестановок из 7 элементов, т. е.

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040.$$

Тренировочные тестовые задания к разделу 8

1. На диаграмме показано содержание питательных веществ в шоколаде.



Сколько примерно углеводов содержится в шоколадке массой 100 г?
1) около 20 г 2) менее 30 г 3) около 40 г 4) около 50 г

2. Определите по диаграмме из задания 1, в каких пределах находится процентное содержание белков в шоколаде.
1) 0—25 % 2) 25—50 % 3) 50—75 % 4) 75—90 %

3. В службе такси в данный момент свободно 10 машин: 5 черных, 1 желтая, остальные — зеленые. Какова вероятность того, что к заказчику приедет такси зеленого цвета?
1) 0,1 2) 0,4 3) 0,5 4) 0,6

4. Одновременно бросают три симметричные монеты. Какова вероятность, что выпадут два орла и одна решка?
1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) 0,33 4) 0,375

5. Девочка каждый месяц измеряла свой рост и вычисляла, на сколько сантиметров она подросла. Результаты вычислений записаны в таблице:

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Увеличение роста (в см)	1,4	1	1,2	1,4	1	1,2

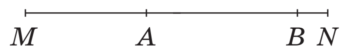
На сколько сантиметров в месяц в среднем изменялся рост девочки в этот период?
1) на 1 см 2) на 1,1 см 3) на 1,2 см 4) на 1,4 см

6. Сколькими способами можно расставить на площадке 6 волейболистов?
1) 24 2) 72 3) 96 4) 720

7. Лучник выполнил 7 выстрелов по мишени и набрал соответственно 7; 6; 8; 7; 8; 8; 6 очков. Найдите моду этого ряда данных.
1) 6 2) 7 3) 7,5 4) 8

8. В киоске продаются 5 видов ручек и 4 вида тетрадей. Сколькими способами можно составить пару из ручки и тетради?
1) 9 2) 14 3) 20 4) 24

9. На отрезке MN случайным образом выбрана точка X. Какова вероятность того, что эта точка находится на отрезке BN, если $AM = 4$ см, $AB = 5$ см, $MN = 10$ см?



1) 0,1 2) 0,2 3) 0,4 4) 0,5

10. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м (все показали разное время)?
1) 64 2) 128 3) 336 4) 720

11. Девочки 9-го класса на уроке физкультуры при прыжках в высоту показали следующие результаты: 90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140, 140.
а) Найдите медиану совокупности выборки.
б) Найдите моду этой совокупности данных.
в) Найдите среднее значение этого ряда данных (ответ округлить до десятых).

Ответ: а)________________; б) ________________; в) __________________.

12. В лотерее 400 выигрышных билетов и 3 600 билетов без выигрыша. Какова вероятность, что первый приобретенный билет будет выигрышным?
Ответ: ______________________.

13. Из натуральных чисел от 1 до 25 ученик наугад называет число. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 25?
Ответ: ______________________.

14. В мастерской три станка. За рабочую смену из строя выходит не более одного станка. Первый выходит из строя с вероятностью 0,12, второй — с вероятностью 0,05, а третий — с вероятностью 0,1. Найдите вероятность того, что за смену ни один станок не выйдет из строя (ответ округлите до сотых).
Ответ: ______________________.

15. Молокозавод выпускает молоко разной жирности. В продуктовых магазинах города провели опрос 40 покупателей о том, какой жирности молоко они покупают. Результаты опроса представили в таблице:

Жирность молока, %	0,5	1	1,5	2,5	3,6	6
Количество покупателей	6	4	5	12	7	6

Завод должен выпускать 3 000 л молока ежедневно. Сколько молока жирностью 2,5 % ему необходимо выпускать?
Ответ: ______________________.

16. 12 учеников пожали друг другу руки перед соревнованиями. Сколько было сделано рукопожатий?
Ответ: ______________________.

17. Сколько пятизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 5, 7, 8?
Ответ: ______________________.

18. Сколько пятизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 0, 2, 5, 7, 8?
Ответ: ______________________.

19. В шкатулке лежат 6 шаров, 3 из них — белые. Какова вероятность, что из двух наугад взятых шаров оба белые?
Ответ: ______________________.

Ответы

Раздел 1

1. 3. **2.** 2. **3.** А1, Б3, В4. **4.** 2. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 1. **8.** 4. **9.** 4. **10.** 2. **11.** 9. **12.** 0,2. **13.** 320. **14.** 72,9 кг. **15.** $7{,}25 \cdot 10^{-9}$. **16.** 140 кг. **17.** $5 \cdot 10^{-5}$. **18.** 7,5 %. **19.** 399. **20.** $a10$.

Раздел 2

1. 2. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 2. **5.** А4, Б1, В3. **6.** 1. **7.** 4. **8.** 2. **9.** 3. **10.** 4. **11.** −4,5. **12.** 1. **13.** 7. **14.** $\dfrac{1}{a+1}$. **15.** −1,25. **16.** 21. **17.** $8b^2 - 5ab$. **18.** −10 и 3. **19.** 28. **20.** 10.

Раздел 3

1. 3. **2.** 4. **3.** 1. **4.** 4. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 3. **8.** 4. **9.** 3. **10.** 2. **11.** 1. **12.** 17. **13.** 2. **14.** (−4; 3), (−3; 4). **15.** [0,5; 1). **16.** 7 см, 8 см. **17.** $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$. **18.** −3. **19.** 3 км/ч. **20.** $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 4]$.

Раздел 4

1. 3. **2.** А1, Б3, В1. **3.** 3. **4.** 1. **5.** 4. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 1. **9.** 2. **10.** 2. **11.** 99,1. **12.** $\dfrac{3}{32}$. **13.** −3. **14.** −2,7. **15.** 3. **16.** −59,5. **17.** 23,25. **18.** 40. **19.** 29. **20.** 3, 6, 12 или 27, 18, 12.

Раздел 5

1. 3. **2.** 3. **3.** 2. **4.** А2, Б4, В3. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 4. **9.** 2. **10.** 1. **11.** −3. **12.** 1. **13.** 2. **14.** $x \geq 2$. **15.** 8. **16.** $(-\infty; 1]$. **17.** (1; 3). **18.** −3.

Раздел 6

1. 3. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 3. **9.** 3. **10.** 1. **11.** $\left(-\dfrac{1}{2}; 3\right)$. **12.** 0. **13.** 4. **14.** 135°. **15.** (3; 3). **16.** $3\sqrt{2}$. **17.** 3. **18.** −7. **19.** 9.

Раздел 7

1. 4. **2.** 4. **3.** 4. **4.** 1. **5.** 4. **6.** 3. **7.** 1. **8.** 1. **9.** 1. **10.** 1. **11.** 4. **12.** 3. **13.** 1. **14.** 4. **15.** 2. **16.** 15 см. **17.** 7 см. **18.** 25 см и 30 см. **19.** 19. **20.** 9р см². **21.** 22. **22.** 2,5. **23.** 432 см² **24.** (6; −11). **25.** 2. **26.** −0,5. **27.** $\lambda = -1$, $\mu = 0$. **28.** $2\sqrt{10}$.

Раздел 8

1. 4. **2.** 1. **3.** 2. **4.** 4. **5.** 3. **6.** 4. **7.** 4. **8.** 3. **9.** 1. **10.** 3. **11.** а) 135; б) 140; в) 130,4. **12.** 0,1. **13.** 0,12. **14.** 0,75. **15.** 900 л. **16.** 66. **17.** 120. **18.** 96. **19.** 0,2.

ЭФФЕКТИВНАЯ ПОДГОТОВКА К ОГЭ

ОГЭ

ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ОГЭ! * ГАРАНТИЯ КАЧЕСТВА * ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ОГЭ!

ПОЛУЧИ ВЫСШИЙ БАЛЛ НА ОГЭ!

ИЗДАНИЕ ПОМОЖЕТ:

- сократить время подготовки к ОГЭ;
- повторить все темы курса;
- отработать навыки выполнения заданий разных типов.

МАТЕМАТИКА

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПРАВОЧНИК

В серии «ОГЭ. Универсальный справочник» выходят пособия по основным школьным предметам: русскому языку, литературе, математике, истории, обществознанию, биологии, информатике, химии и физике.

ISBN 978-5-699-82584-4

9 785699 825844 >